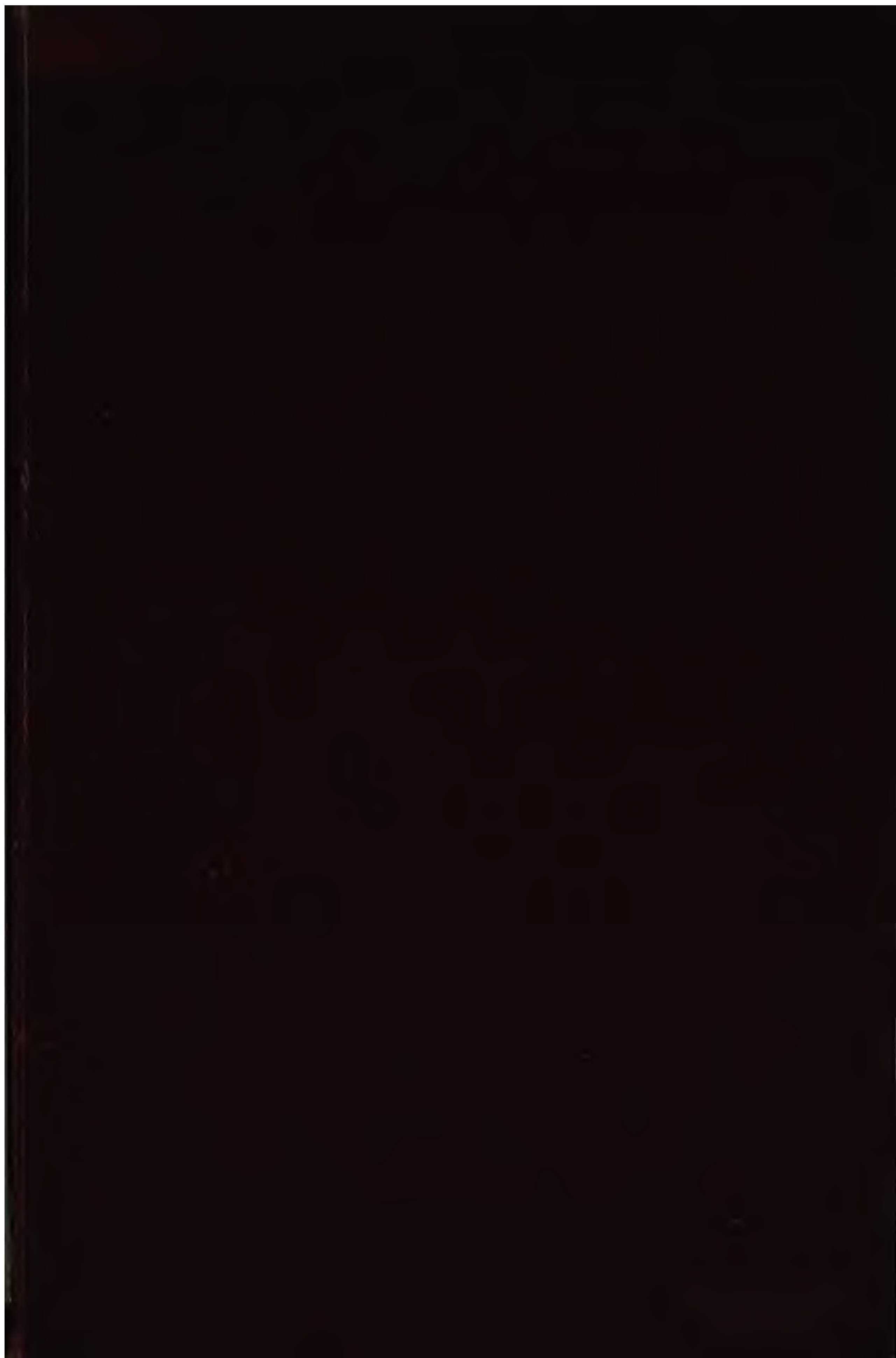










35

HISTOIRE

DE L'ARITHMÉTIQUE

I

RECHERCHES NOUVELLES
CONCERNANT LES ORIGINES DE NOTRE SYSTÈME DE NUMÉRATION ÉCRITE

II

LE NOMBRE NUPTIAL ET LE NOMBRE PARFAIT DE PLATON
EXPLICATION D'UNE ÉNIGME MATHÉMATIQUE QUI SE TROUVE AU COMMENCEMENT
DU VIIIe LIVRE DE LA RÉPUBLIQUE

PAR

TH. HENRI MARTIN

Doyen de la Faculté des lettres de Rennes, correspondant de l'Institut

---

(Extrait de la *Revue archéologique*, XIIIe année.)

PARIS
A. LELEUX, LIBRAIRE
ÉDITEUR DE LA REVUE ARCHÉOLOGIQUE
RUE DES POITEVINS, 11

1857

HISTOIRE

DE L'ARITHMÉTIQUE

I

RECHERCHES NOUVELLES
CONCERNANT LES ORIGINES DE NOTRE SYSTÈME DE NUMÉRATION ÉCRITE

II

LE NOMBRE NUPTIAL ET LE NOMBRE PARFAIT DE PLATON
EXPLICATION D'UNE ÉNIGME MATHÉMATIQUE QUI SE TROUVE AU COMMENCEMENT
DU VIIIe LIVRE DE LA RÉPUBLIQUE

PAR

TH. HENRI MARTIN

Doyen de la Faculté des lettres de Rennes, correspondant de l'Institut

---

(Extrait de la *Revue archéologique*, XIIIe année.)

PARIS
A. LELEUX, LIBRAIRE
ÉDITEUR DE LA REVUE ARCHÉOLOGIQUE
RUE DES POITEVINS, 11

1857


BODLEIAN
16 9·1897
LIBRARY

RECHERCHES NOUVELLES

CONCERNANT LES ORIGINES

DE NOTRE SYSTÈME DE NUMÉRATION ÉCRITE.

I.

État de la question.

Jusqu'à ces dernières années, c'était une opinion généralement admise (1), que notre système de numération écrite avec neuf chiffres qui prennent une valeur de position, nous était venu des Arabes par Gerbert vers la fin du Xe siècle, et aujourd'hui encore nos chiffres ont gardé le nom de *chiffres arabes*. Cependant, d'une part, quelques érudits (2) avaient eu la pensée malheureuse de soutenir que nos neuf chiffres étaient les neuf premières lettres de l'alphabet grec, altérées, jusqu'au point d'être rendues méconnaissables, par les copistes latins du moyen âge; d'autre part, avec beaucoup plus de raison, quelques savants (3) avaient remarqué qu'un passage du

(1) Voyez, par exemple, Pancirolle, *Rerum memorabilium*, lib. I, tit. XLII; G. J. Vossius, *De scientiis mathematicis*, chap. VIII, § 6, p. 34; l'abbé Lebœuf, *Recueil de divers écrits pour servir d'éclaircissements à l'Histoire de France*, t. II, p. 84 (Paris, 1738); Heilbronner, *Historia matheseos universæ*, IV, 1, § 14, p. 739-740; Wallis, *Algebra* (*Operum*, t. II, p. 10, 11, 15, etc.); Bossut, *Histoire des mathématiques*, période II, chap. I, t. I, p. 195; Kæstner, *Geschichte der Mathematik*, part. I, p. 32 et suiv., part. II, p. 695 et suiv.; Andres, *Dell' origine, dei progressi e dello stato attuale d'ogni letteratura*, t. I, cap. IX, (Parma, 1782 et suiv., 8 vol. in-4); Colebrooke, *Dissertation*, en tête de l'ouvrage intitulé: *Algebra with arithmetics and mensuration from the sanskrit of Brahmegupta and Bhascara*, p. LIII (London, 1817, in-4); M. de Montferrier, *Dictionnaire des sciences mathématiques*, t. II, p. 60 (Paris, 1836); M. Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, Discours préliminaire, note 2, t. I, p. 201 (Paris, 1838, in-8); M. Pouchet, *Histoire des sciences naturelles au moyen âge*, p. 57 (Paris, 1853, in-8), et M. de Sismondi, *Histoire de France*, t. IV, p. 52-53 (Paris, 1823, in-8).

(2) Voyez, par exemple, Conrad Rauchfuss (Dasypodius), *Institutiones mathematicæ*, I; Huet, *Demonstratio evangelica*, prop. 4, c. XIII, num. 9, Addenda ad p. 139, l. 39, p. 647 (1re éd., Paris, 1679, in-f°), et Bayer, *Historia regni Græcorum bactriani*, § 49, p. 129-130 (Saint-Pétersbourg, 1738, in-4).

(3) Voyez, par exemple, Isaac Vossius, sur Pomponius Mela, I, 12 (p. 619-620,

HISTOIRE

DE L'ARITHMÉTIQUE

I

RECHERCHES NOUVELLES
CONCERNANT LES ORIGINES DE NOTRE SYSTÈME DE NUMÉRATION ÉCRITE

II

LE NOMBRE NUPTIAL ET LE NOMBRE PARFAIT DE PLATON
EXPLICATION D'UNE ÉNIGME MATHÉMATIQUE QUI SE TROUVE AU COMMENCEMENT
DU VIII[e] LIVRE DE LA RÉPUBLIQUE

PAR

TH. HENRI MARTIN

Doyen de la Faculté des lettres de Rennes, correspondant de l'Institut

---

(Extrait de la *Revue archéologique*, XIII[e] année.)

PARIS
A. LELEUX, LIBRAIRE
ÉDITEUR DE LA REVUE ARCHÉOLOGIQUE
RUE DES POITEVINS, 11

—

1857

il n'y a pas un mot sur la manière d'écrire et de disposer les nombres pour les opérations arithmétiques, ni sur la manière d'exécuter ces opérations; mais, dans le texte et dans la traduction (10), la *table des multiples* se trouve et devait se trouver, parce qu'elle met en évidence la composition des nombres, c'est-à-dire un des objets de cet ouvrage spéculatif. Ayant donné ainsi cette table dans son *Arithmétique*, Boèce pouvait se dispenser et s'est dispensé en effet de la répéter dans sa *Géométrie*, qui fait suite à son *Arithmétique* et à sa *Musique*, et qui est adressée au même personnage. La *Géométrie* de Boèce, au contraire, a un but essentiellement pratique, savoir le calcul arithmétique de l'aire des surfaces planes pour l'arpentage: elle se divise, comme nous le verrons, en deux parties, dont la première consiste en quelques propositions géométriques indispensables pour le but de l'auteur, et dont la seconde, qui commence avant la fin du premier livre, indique la manière de faire les calculs. C'est en tête de cette seconde partie que se trouve la description de la méthode de l'*abacus*, et l'auteur montre l'utilité pratique de cette méthode de numération pour l'objet qu'il se propose. C'est donc bien à tort qu'on a soupçonné d'interpolation (11) ce texte, qui se lie si étroitement au reste de l'ouvrage. En outre, comme M. Chasles (12) l'a montré, il est question de ce même système de numération dans deux autres passages, l'un du premier livre, l'autre du second.

Cependant, non-seulement le soupçon d'interpolation a été reproduit par un juge très-compétent sur l'histoire ancienne des mathématiques, par M. Nesselmann (13); mais un autre savant, très-versé dans l'étude des vieux textes latins sur cette matière, M. Lachmann (14) s'est demandé si Boèce a jamais écrit une *Géométrie*, et il n'a pas trouvé de réponse à cette question. Ces doutes, surtout le

(10) Voyez Nicomaque, *Arithmétique*, I, 19, p. 96 d'Ast, et Boèce, *Arithmétique*, I, 26, p. 1314 des Œuvres (Bâle, 1570, in-f°). M. Chasles se trompe donc, quand il dit que nulle part avant Boèce il n'est parlé de la *Table de multiplication* (*Sur le passage du premier livre de la Géométrie de Boèce*, p. 12); mais il a raison de dire que jamais aucun auteur *ancien* ne l'a nommée *Table de Pythagore*. Voyez plus haut, note 7.

(11) Ce soupçon a été exprimé notamment par Heilbronner et par Wallis, cités dans a note 1.

(12) *Sur le passage du premier livre de la géométrie de Boèce*, p. 10-11.

(13) *Die Algebra der Griechen*, chap. III, p. 102.

(14) *Die Schriften der rœmischen Feldmesser herausgegeben und erlæutert* von F. Blume, K. Lachmann und A. Rudorff (Berlin, 1848-1852, 2 vol. in-8), t. II, p. 94, *Ueber die dem Boëthius zugeschriebenen agrimensorischen Stücke*, von Lachmann.

dernier, auquel personne, du moins à ma connaissance, n'a encore répondu jusqu'à ce jour, me paraissent appeler un nouvel examen de ce point important. D'un autre côté, l'identité de l'*abacus* de Gerbert et de celui d'autres auteurs des Xe, XIe et XIIe siècles avec l'*abacus* de Boèce a été parfaitement établie par M. Chasles; mais Gerbert, ce rénovateur du système de l'abacus au moyen âge, nous est présenté généralement comme un disciple des Arabes; M. Chasles lui-même n'ose pas contredire une opinion si accréditée, et se contente de soutenir que c'est à Boèce et non aux Arabes que Gerbert a emprunté la méthode de l'abacus. Or, si l'authenticité de la *Géométrie* de Boèce est mise en doute, la thèse de M. Chasles se trouve compromise, et l'on peut être tenté de supposer, avec M. Libri, que cette *Géométrie*, ou du moins la partie qui concerne l'*abacus*, est postérieure à l'influence arabe transmise par Gerbert, et qu'elle est du XIe siècle, c'est-à-dire précisément de l'époque des plus anciens manuscrits qui nous restent de l'ouvrage de Boèce.

Pour combattre ce double doute, et pour confirmer la thèse soutenue par M. Chasles, je vais établir que la *Géométrie* de Boèce, en deux livres, avec les textes sur l'*abacus*, mais sans certains appendices ajoutés après la fin du second livre, est bien authentique; je vais prouver que Gerbert a été le disciple des anciens et de Boèce en particulier, et n'a été nullement le disciple des Arabes, dont il n'a jamais fréquenté les écoles, ni connu la langue ou les écrits; je vais montrer que le système de l'*abacus* nous est venu incontestablement des anciens Romains, et que ce système, quant à ses principes essentiels, est identique avec notre système moderne de numération écrite, qui s'en est formé par une modification très-utile sans doute, mais légère, facile et purement extérieure. Ensuite, je tâcherai de faire voir à quelle époque tardive, par quels degrés, par quelles causes et sous quelles influences les Romains étaient arrivés à la méthode de l'*abacus*. Enfin je montrerai que le système arabe de numération écrite, avec sa forme plus commode et plus simple, est d'origine indienne, et que, depuis le XIIe siècle de notre ère, l'influence arabe a contribué à un dernier perfectionnement et surtout à la propagation de notre numération écrite, semblable à celle des Arabes et des Indiens.

II.

Authenticité de la *Géométrie* de Boèce, et spécialement du passage concernant l'*abacus*.

Je commence par le point capital, par la question de savoir si les textes de Boèce sur l'*abacus* sont bien certainement de cet auteur. Je dis d'abord que, pour contester l'authenticité du texte principal de Boèce sur la numération avec neuf chiffres et avec valeur de position, il faudrait contester l'authenticité de la *Géométrie* de Boèce tout entière, et que, par conséquent, le savant historien de l'*Algèbre des Grecs*, M. Nesselmann, qui n'est pas allé jusque-là et s'est arrêté au soupçon d'interpolation, ne doit pas être écouté. En effet, ce texte est donné par tous les manuscrits, même par ceux où les *apices* manquent et qui présentent ici à tort la *table des multiples* au lieu de l'*abacus* (15). Dans plusieurs manuscrits, notamment dans deux excellents manuscrits du XI[e] siècle, on trouve en cet endroit, non pas la *table de multiplication*, qui n'a aucun rapport avec le contexte, mais les *apices* et les têtes des colonnes de l'*abacus*, où les chiffres avaient une valeur de position (16) : la figure de l'*abacus* lui-même manque; mais le contexte montre qu'elle devait s'y trouver et ce qu'elle devait être. D'ailleurs, un peu plus haut, d'après tous les manuscrits et les éditions (17), Boèce avait déjà annoncé l'*abacus* ou *table géométrique*, qu'il donnait ici suivant sa promesse; plus loin, à la fin du second livre, fin incomplète dans le texte des éditions (18), mais complétée par un bon manuscrit du XI[e] siècle, il parle aussi de l'*abacus* et de la valeur de position des chiffres pour les fractions (19). D'ailleurs, nous avons vu, et nous verrons encore mieux tout à l'heure en analysant la *Géométrie* de Boèce, que la théorie de l'*abacus* ou *table géométrique* se rattache au plan général de l'ouvrage. Elle est donc bien de la même main que le reste.

Je dis ensuite que M. Lachmann a eu tort de suspecter l'authen-

(15) Voyez Boèce, *Géométrie*, I, p. 1517-1519 (Bâle, 1570, in-f°).

(16) Voyez M. Chasles, aux lieux cités dans la note 5, surtout *Mémoire sur l'origine de notre système de numération*, p. 6.

(17) Voyez Boèce, *Géométrie*, I, p. 1516, l. 8-10 (Bâle, 1570, in-f°).

(18) P. 1536, jusqu'à la ligne 4 d'en bas. Ce qui suit, à partir des quatre dernières lignes de cette page, est apocryphe, comme nous le verrons.

(19) Le passage qui manque dans l'édition, à la suite du tableau des divisions de l'once, est donné par M. Chasles, *Aperçu*, etc., trad. allem. de M. Sohnke, p. 537, et *Sur le passage du premier livre de la Géométrie de Boèce*, etc., p. 10-11.

ticité de la *Géométrie* de Boèce tout entière. M. Lachmann est l'un des trois savants qui ont publié de concert la meilleure édition des *Agrimensores*; il a inséré dans cette collection deux passages de cette *Géométrie* (20), et en outre des appendices de ce même ouvrage (21), les uns déjà publiés, les autres inédits, et tous apocryphes; il a d'abord révoqué en doute (22) l'authenticité du second livre de cette *Géométrie*, tiré tout entier des *Agrimensores* latins antérieurs au VI[e] siècle, et l'authenticité de la fin du premier livre, où le second est annoncé; enfin il est allé jusqu'à douter (23) que Boèce ait jamais écrit une *Géométrie*. Quelques faits vont répondre à ces doutes mal fondés. L'*Arithmétique* bien authentique de Boèce est adressée *ad patricium Symmachum*, c'est-à-dire à son beau-père Symmaque, qui avait, comme lui, la dignité de *patrice* (24), et qu'il invite, comme juge très-compétent, à corriger son œuvre (25). Or, au commencement du premier livre de la *Géométrie*, on lit ces mots : *Mi patrici geometrarum exercitatissime*. Ce dernier ouvrage n'est donc pas un traité anonyme attribué à Boèce par une erreur ou par une conjecture hasardée des copistes; l'hésitation n'est possible qu'entre deux hypothèses : c'est l'œuvre de Boèce lui-même, ou bien c'est l'œuvre d'un faussaire, qui a voulu la faire passer sous le nom de Boèce. Or, rien n'appuie la seconde hypothèse, et nous allons voir qu'un témoignage irrécusable la détruit. Il est vrai que, suivant la remarque de M. Lachmann, Gerbert, le pape Sylvestre II, dans sa *Géométrie* (26), ne mentionne pas celle de Boèce. Mais, postérieur de cinq siècles à Boèce, Gerbert pouvait ne pas posséder la *Géométrie* de cet auteur à l'époque où il écrivait la sienne, dans laquelle il s'est attaché surtout à la collection des *Agrimensores;* ou bien, en supposant qu'il possédât dès lors la *Géométrie* de Boèce, il pouvait ne pas se croire obligé de la citer, même en lui faisant quelques emprunts; et surtout, ce qui est décisif contre l'objection, c'est que, dans une de ses *Lettres* (27), Gerbert se félicite expressément de s'être procuré la *Géométrie* de Boèce. D'ailleurs, voici un témoin plus sûr que Gerbert :

(20) *Die Schriften der rœmischen Feldmesser*, t. I, p. 413-416.

(21) *Ibidem*, p. 377-412.

(22) *Ibidem*, t. II, p. 64 et p. 90.

(23) *Ibidem*, t. II, p. 66 et p. 94.

(24) Comparez M. Morin, *Études sur Symmaque*, p. 2 (Paris, 1847, in-8).

(25) Voyez le titre, p. 1293, et la Préface, p. 1295-1296 (Bâle, 1570, in-f°).

(26) Elle a été publiée par Pez, *Thesaurus anecdotorum novissimus*, t. III, part. II, col. 5 et suiv.

(27) *Gerberti Epistola VIII* du recueil de Masson, dans la collection de Duchesne *Historiæ Francorum scriptores coætanei*, t. II, p. 790.

Cassiodore, contemporain de Boèce, nous atteste (28) que cet auteur avait traduit la *Géométrie* d'Euclide. Or, la *Géométrie* de Boèce s'annonce expressément dès les premiers mots et par son titre même (29) comme une traduction des propositions d'Euclide relatives aux *figures de l'art géométrique*, c'est-à-dire aux figures planes considérées dans l'arpentage, à l'exclusion de la *stéréométrie*. En effet, le premier livre presque entier (30) est la traduction des énoncés des principales propositions contenues dans les quatre premiers livres d'Euclide. La fin de ce même livre (31) et tout le second livre (32), malgré la répétition du même titre, ne concernent plus la géométrie théorique d'Euclide, mais la géométrie pratique des arpenteurs, que l'auteur nomme (33) *agrimensores* ou *podismatici*, et parmi eux il suit principalement un certain Archytas, que, malgré son nom grec, il cite expressément (34) comme un *auteur latin non méprisable* sur l'arpentage. L'auteur de cette seconde partie est bien toujours Boèce; car il marque lui-même (35) la liaison de cette fin du premier livre avec ce qui précède et avec le second livre, tout pratique, qui s'appuie perpétuellement sur les propositions d'Euclide traduites, sans les démonstrations, dans le premier livre; un peu plus loin, au commencement du passage concernant l'*abacus* (36), il cite ses traités précédents sur l'*Arithmétique* et sur la *Musique;* et dans ce même passage (37) faussement suspecté, il renvoie expressément à son *Arithmétique* pour une proposition qui se trouve en effet dans l'*Arithmétique* de Boèce (38). On peut remarquer aussi qu'une expression grecque de Nicomaque (ἑτερομήκης), citée dans l'*Arithmétique* de Boèce (39), qui est une traduction libre du traité grec de cet auteur, est citée aussi dans le second livre de la *Géométrie* de Boèce (40). A

(28) *Variarum Ep.*, I, 45, fol. 19 recto; *De geometria*, fol. 309 verso (Paris, 1588, in-4).

(29) Œuvres de Boèce, p. 1487 (Bâle, 1570, in-f°).

(30) *Ibidem*, p. 1487-1516, l. 3.

(31) *Ibidem*, p. 1516, l. 4 — p. 1519.

(32) *Ibidem*, p. 1520 — p. 1536, l. 4 d'en bas. Comp. M. Chasles, *Aperçu*, etc., note XII, trad. allem., p. 524-526.

(33) *Ibidem*, p. 1520. l. 4 et 8.

(34) *Ibidem*, p. 1516, l. 8-9; p. 1523, l. 22; p. 1526, l. 9 et 27; p. 1535, l. dernière.

(35) *Ibidem*, p. 1514, l. 5 et suiv.; p. 1516, l. 4 et suiv.; p. 1520, l. 1 et suiv.

(36) *Ibidem*, p. 1518, l. 4 d'en haut.

(37) *Ibidem*, p. 1518, l. 4 d'en bas.

(38) II, 5, p. 1329, l. 20-21. Comp. I, 7, p. 1299, l. 6 d'en bas.

(39) II, 26, p. 1341, l. 12 d'en bas.

(40) P. 1528, l. 12. Lisez *heteromeces*.

la suite de ce second livre, dans le texte imprimé (41), on trouve, sous le titre *Boëthii liber de Geometria*, une compilation qui est anonyme dans les meilleurs manuscrits, où elle est intitulée *Demonstratio artis geometricæ* (42) : le premier alinéa de cette compilation (43) est un extrait de l'*Arithmétique* de Boèce. Autant M. Lachmann a eu raison de nier l'authenticité de cet appendice et de quelques autres, autant il a eu tort de révoquer en doute l'authenticité de l'ouvrage à la suite duquel ils ont été ajoutés par les copistes.

III.

Premiers documents du moyen âge sur l'*abacus*; traités de Gerbert et de saint Odon.

La signification de l'*abacus* dit *de Pythagore*, et la connaissance que Boèce en avait au commencement du VI[e] siècle de notre ère, sont donc des faits bien constants. Maintenant cherchons quelles sont, depuis l'époque de Boèce, les premières traces que l'on rencontre de ce système de numération écrite.

On a publié, dans le recueil des œuvres de Bède (44), un traité *De numerorum divisione*, où l'*abacus* avec valeur de position des chiffres n'est pas décrit *ex professo;* mais il y est supposé perpétuellement, et il y est nommé dans le traité même aussi bien que dans la préface, qui est une lettre de l'auteur à son ami Constantin (*ad Constantinum suum*). Tout soupçon d'une origine arabe serait écarté, s'il fallait admettre que cet ouvrage fût réellement de Bède, moine anglais du VIII[e] siècle. M. Chasles (45) avait d'abord été tenté d'incliner un peu vers cette opinion, que tout récemment encore M. Arneth a reproduite (46).

(41) P. 1536, l. 4 d'en bas — p. 1546.

(42) Voyez M. Lachmann, *Schriften der rœmischen Feldmesser*, t. II, p. 81-90. J'ignore quels appendices ont pu porter à cinq le nombre des livres de la *Géométrie* de Boèce dans quelques manuscrits, par exemple dans un manuscrit de la Bibliothèque laurentienne de Florence, cité par M. Libri (*Histoire des sciences mathématiques en Italie*, t. I, p. 89), et dans un manuscrit du Vatican, indiqué par Montfaucon (*Bibliotheca bibliothecarum manuscriptorum nova*, t. I, p. 88). Comp. M. Chasles, *Aperçu*, etc., trad. allem., p. 526.

(43) P. 1536, l. 4 d'en bas, et p. 1537. l. 9 d'en haut.

(44) *Bedæ opera*, t. I, p. 123-126 (Cologne, 1612, 8 tomes in-f°).

(45) *Aperçu*, etc., note XII, trad. allem., p. 528-529, en note, et *Sur le passage du premier livre de la Géométrie de Boèce*, etc., p. 6, note 1.

(46) *Geschichte der reinen Mathematik*, p. 213 (Stuttgard, 1852, in-8).

Mais M. Chasles (47), après avoir consulté les manuscrits, a reconnu que l'attribution de cet opuscule à Bède n'est pas soutenable, et que Gerbert est le véritable auteur. En effet, Bède n'a pas compris ce traité dans la liste de ses œuvres, dressée par lui-même à l'âge de 59 ans (48), c'est-à-dire en 731, quatre ans avant sa mort (49); et il ne paraît pas avoir eu un correspondant et ami nommé Constantin (50). Guillaume de Malmesbury (51), moine anglais du XIIe siècle, a raison d'attribuer cet opuscule à Gerbert et de dire qu'il l'avait adressé à Constantin, moine de Fleury; car c'est sous le nom de Gerbert que cet opuscule se trouve dans beaucoup de manuscrits, d'après lesquels M. Chasles (52) l'a publié avec traduction et commentaire; il y est précédé de la *lettre à Constantin*, entièrement conforme à celle qui a été publiée dans les œuvres de Bède; cette lettre *Gerberti ad Constantinum suum* est la 161e et dernière du recueil de lettres de Gerbert publié par J. B. Masson d'après les manuscrits de son frère Papire Masson et reproduit par Duchesne et par Desponts (53). Aucun de ces trois éditeurs ne s'est douté que cette lettre eût déjà paru sous le nom de Bède. Masson avait conservé et Desponts a réimprimé, à la suite de cette lettre 161e du recueil, les premiers mots du traité qu'elle annonce; ces mots ont été supprimés dans l'édition de Duchesne. La lettre et le traité sont bien du célèbre moine bénédictin du Xe siècle, Gerbert, né en Auvergne et mort en l'an 1003, après avoir été le protégé des empereurs Othon Ier le Grand, Othon II et Othon III, l'ami d'Hugues Capet et le précep-

(47) *Explication des traités de l'abacus et particulièrement du traité de Gerbert*, p. 1-6, p. 47 et p. 61, note 1.

(48) A la fin du cinquième et dernier livre de son *Ecclesiastica historia gentis Anglorum* (*Rerum britannicarum scriptores vetustiores*, p. 280, Lyon, 1587, in-f°).

(49) Voyez Ziegelbauer, *Historia litteraria ordinis S. Benedicti*, t. III, p. 46-54 (Augsbourg, 1754, in-f°).

(50) Voyez Ziegelbauer, *ibidem*.

(51) *De gestis regum Anglorum libri V*, lib. II, cap. X, fol. 35 verso — fol. 38 recto. (*Rerum anglicarum scriptores post Bedam præcipui*, éd. Savile, Londres, 1596, in-f°.)

(52) *Explication des traités de l'abacus et particulièrement du traité de Gerbert*, p. 47-65.

(53) L'édition de J. B. Masson est de Paris, 1611, in-4. La réimpression de Duchesne se trouve dans sa grande collection, *Historiæ Francorum scriptores coætanei*, t. II, *Gerberti Epistolæ* CLXI, p. 789-827, et celle de Desponts dans sa *Bibliotheca maxima Patrum*, t. XVII, p. 669-691. Comp. Casimir Oudin, *De scriptoribus ecclesiasticis*, t. II, p. 512, et Ziegelbauer, *Historia litteraria ordinis S. Benedicti*, t. IV, p. 306. L'identité de cette lettre de Gerbert avec celle qui est imprimée en tête du traité *De numerorum divisione* dans les Œuvres de Bède avait déjà été signalée par Andres, *Dell' origine, dei progressi e dello stato attuale d'ogni letteratura*, t. IV, p. 53 (Parma, 8 vol. in-4, 1782 et suiv.).

teur de Robert le Pieux, et après avoir été successivement moine du couvent de Saint-Géraud à Aurillac, abbé de Bobbio en Piémont, écolâtre de l'abbaye de Saint-Rémi à Reims, archevêque de Reims, puis de Ravenne, et enfin pape sous le nom de Sylvestre II (54). En effet, plusieurs lettres et opuscules de Gerbert, notamment sa lettre *De sphæræ constructione* (55), sont adressés à son ami et confrère Constantin, moine et écolâtre de l'abbaye de Fleury-sur-Loire, et plus tard abbé de Micy à Orléans (56), et le moine Richer, contemporain de Gerbert, dit que, pour prendre une entière connaissance de l'art de l'*abacus*, il faut lire l'ouvrage que Gerbert a adressé à l'écolâtre Constantin (*ad C. grammaticum*). Ainsi, l'authenticité de cet opuscule de Gerbert ne peut pas être révoquée en doute.

Parmi les œuvres de Gerbert, Fabricius (57) et les Bénédictins auteurs de l'*Histoire littéraire de France* (58) signalent un traité *De abaco*. Mais M. Chasles (59) a constaté que dans les manuscrits c'est le même traité de Gerbert que l'on trouve sous les titres : *De numerorum divisione*, ou bien *Rationes numerorum abaci*, ou bien simplement *Abacus*. Cependant il n'est pas inutile de prévenir quelques difficultés qu'on pourrait élever contre l'assertion parfaitement juste de ce savant.

On pourrait être tenté d'admettre l'existence d'un autre traité de Gerbert intitulé *De abaco* et adressé à un certain Théophile; car dans le catalogue imprimé des *Manuscrits latins de la Bibliothèque royale*, le manuscrit 7189 A est indiqué comme contenant, sous le n° 1er, un ouvrage que le rédacteur du Catalogue intitule : *Gerberti scholastici tractatus de abaco*, et dont la préface porte le titre : *Theophilo suo Gerbertus scholasticus*. Mais ce qu'on trouve dans le manuscrit même, c'est encore le traité *De numerorum divisione*, précédé de la même préface sous forme de lettre et finissant avec les mots *ad extremos digitos*, c'est-à-dire comme l'édition de M. Chasles, et avant le dernier chapitre du texte publié dans les œuvres de Bède.

(54) Voyez Ziegelbauer, *Hist. litt. ord. S. Bened.*, t. I, p. 37, 235-236, 329-330, 455; t. II, p. 328, 557; t. IV, p. 81, 196, 300, 306, 307, 309, 367, 667, 726, etc.

(55) Dans les *Analecta vetera* de Mabillon, t. II, p. 212 (p. 102, ed. nov. in-f°). Comp. l'*Hist. litt. de France*, t. VI, p. 37, 576, 580 et 583, et Oudin, *De script. eccles.*, t. II, p. 511-513.

(56) Voyez Ziegelbauer, l. c., t. I, p. 235-236. Dans une lettre adressée à un autre moine (*Ep.* XCII, t. 2, p. 811 de la collection de Duchesne), Gerbert appelle Constantin *scholasticus adprime eruditus mihique in amicitia conjunctissimus.*

(57) *Bibliotheca mediæ et infimæ latinitatis*, au mot *Gerbertus.*

(58) T. II, p. 578-579.

(59) *Explication des traités de l'abacus*, etc., p. 1 et p. 61, note 1.

Cependant le vocatif *Theophile* se retrouve dans la première phrase après les mots *dulce solamen laborum*. Ce manuscrit est du XVI[e] siècle ou du XVII[e], et par conséquent peu digne de confiance. Si pourtant le nom *Theophilus* en ces deux endroits n'était pas une faute de copiste et remontait à un manuscrit original et authentique, il faudrait croire que Gerbert avait fait deux exemplaires de sa lettre et de son opuscule pour deux de ses amis. Mais, autant ses écrits sont pleins de son amitié pour le moine Constantin, autant Théophile, ami de Gerbert, serait un personnage inconnu.

Dans le manuscrit 6620 du même catalogue, manuscrit du XI[e] siècle, et par conséquent très-digne de confiance par son antiquité, le traité publié dans les œuvres de Bède se trouve précédé de la préface, sans aucun titre et sans aucune suscription. Mais, dans la préface même, après les mots *dulce solamen laborum*, on trouve le mot CONST., abrégé de *Constantine*. Ainsi l'ouvrage était bien adressé au moine Constantin, et le rédacteur du Catalogue, qui intitule cet opuscule *Rationes numerorum abaci*, ne se trompe pas en ajoutant cette note : *Authoris nomen non comparet ; is autem est Gerbertus scholasticus*. En effet, dans les autres manuscrits, Gerbert est nommé comme auteur dans la suscription : la préface et l'opuscule sont une lettre adressée au moine Constantin. Les copistes de manuscrits et les rédacteurs de catalogues ont donné à cette lettre les titres qu'ils ont voulu. Du reste, le contenu de l'opuscule est le même dans ce manuscrit que dans le précédent et que dans l'édition de M. Chasles, si ce n'est qu'après les derniers mots, *ad extremos digitos*, le manuscrit ajoute immédiatement : *Si multiplicaveris singularem numerum per decenum, dabis unicuique digito decem nomina*. Cette phrase altérée et mise ici hors de propos est la répétition inexacte de la seconde phrase du premier chapitre : *Si* (multiplicaveris) *singularem* (numerum) *per decenum, dabis unicuique digito decem et omni articulo centum*. Le reste de la page et le verso sont blancs dans le manuscrit. Le chapitre qui se trouve en plus à la fin de l'opuscule dans les œuvres de Bède concerne les mesures de longueur et la mesure du globe terrestre, et est par conséquent un appendice étranger à l'objet de l'opuscule même.

Dans un manuscrit du XI[e] ou du XII[e] siècle, conservé sous le numéro G LXXIII dans la bibliothèque de l'abbaye de Saint-Emmeran à Ratisbonne, Pez et M. Chasles signalent un fragment qui occupe un seul feuillet, et qui est la fin d'un ouvrage de Gerbert. En tête de ce fragment on lit la note suivante écrite au XVI[e] siècle : *Gerberti abacus, hoc est algarismus sive ἀλφαριθμὸς ad Otonem imp. Principium*

non adest. A la fin du fragment, on lit simplement : *Expliciunt lectiones Gerberti super abacum* (60). Dans ce même manuscrit, M. Chasles (61) signale aussi, outre beaucoup d'autres opuscules du même genre, le traité de Gerbert à Constantin. Il resterait à savoir si le fragment dont il vient d'être question ne serait pas une partie détachée de ce même traité. Parmi les lettres de Gerbert, il y en a une de l'empereur Othon, dans laquelle ce prince le prie de lui composer un traité d'arithmétique, et la réponse de Gerbert est une lettre d'envoi de l'ouvrage demandé, dont il ne donne pas le titre (62). Mais cet ouvrage est peut-être entièrement perdu aujourd'hui, ou bien même Gerbert pourrait avoir envoyé à l'empereur une simple copie de l'opuscule composé pour le moine Constantin, et les deux lettres qui viennent d'être citées pourraient être précisément le motif de la conjecture exprimée par la note écrite au XVI[e] siècle dans le manuscrit de Ratisbonne en tête du fragment de Gerbert sur l'*abacus*. Pourtant, dans l'impossibilité où je suis de vérifier le fait sur le manuscrit, il me paraît plus probable que ce fragment appartient à un ouvrage distinct, envoyé par Gerbert à l'empereur Othon.

Le savant auteur de l'*Histoire littéraire de l'ordre de Saint-Benoît*, Ziegelbauer, qui n'a pas soupçonné l'existence d'un opuscule de Gerbert parmi les œuvres imprimées de Bède, énumère comme inédits les ouvrages suivants de Gerbert, dont il a trouvé l'indication dans les catalogues de diverses bibliothèques (63) : 1° *Theoria arithmeticæ cum prologo in eamdem ;* 2° *Regulæ de divisionibus ;* 3° *Abacus seu Regulæ arithmetices ;* 4° *Libellus multiplicationum ;* 5° *Epistola ad Constantinum* (*nempe Floriacensem monachum*) *de regula abaci*. Il

(60) Voyez Pez, *Thesaurus anecdotorum novissimus*, t. I, *Dissertatio isagogica*, § 63, p. XXXVIII, et M. Chasles, *Recherche des traces du système de l'abacus*, etc., § 11, p. 6.

(61) *Explication des traités de l'abacus*, etc., p. 61, note 1 (Comp. *ibidem*, p. 49, note 1); *Développements et détails historiques sur le système de l'abacus*, p. 4, 5, 7, 18, 19, 23, etc., et *Aperçu historique*, etc., note XII, trad. allem. de M. Sohncke, p. 588-589.

(62) *Ep.* CLIII et *Ep.* CLIV du recueil de Masson (t. II, p. 824-825 de Duchesne).

(63) Voyez Ziegelbauer, *Hist. litt. ord. S. Bened.*, t. IV, p. 306. Comp. Oudin, *De script. eccles.*, t. II, p. 512. Ziegelbauer (l. c.) parle aussi d'un *Liber de numeris* de Gerbert, publié, dit-il, par Mabillon dans le t. II des *Analecta vetera*. Mais ce renseignement est inexact : le seul opuscule mathématique de Gerbert publié dans ce recueil (t. II, p. 212 vet. ed., p. 102 ed. nov.) est une lettre à Constantin *De sphæræ constructione*. Parmi les lettres de Gerbert, il y en a une très-courte qui concerne un petit calcul arithmétique (*Ep.* CXXXIV, à Rémi, moine de Trèves, t. II, p. 820 de Duchesne).

est évident que ce dernier titre désigne le traité adressé à Constantin, traité publié d'abord sous le nom et parmi les œuvres de Bède, puis par M. Chasles sous le nom du véritable auteur. C'est probablement aussi ce traité qui est désigné par les quatre premiers titres; car 1° ce même traité est précédé d'un *prologue*, et il concerne l'*arithmétique;* 2° il concerne en majeure partie les *règles de la division;* 3° l'ouvrage entier a pour objet des calculs *arithmétiques* à faire au moyen de l'*abacus;* 4° le commencement traite de la *multiplication*. Il faut probablement rapporter aussi au même opuscule quelques autres titres légèrement différents d'ouvrages de Gerbert sur l'arithmétique, indiqués comme se trouvant dans la bibliothèque du Vatican : M. Chasles, qui les cite, a raison de remarquer que la différence des titres ne prouve pas la différence réelle des ouvrages (64) : les copistes ont intitulé comme ils ont voulu cette lettre didactique de Gerbert à Constantin.

Il est donc douteux que Gerbert ait écrit sur l'arithmétique un ouvrage autre que cette lettre publiée d'abord dans les œuvres de Bède sous le titre *De numerorum divisione*, puis par M. Chasles sous le titre *Constantino suo Gerbertus scholasticus*, et qui, d'après son objet, pourrait être intitulée : *Regulæ abaci de multiplicatione et divisione numerorum*. Cependant le traité d'arithmétique adressé par Gerbert à l'empereur Othon était peut-être distinct du précédent, et il en reste peut-être un fragment dans le manuscrit de Ratisbonne.

Dans la collection de traités anciens sur la musique sacrée que le savant moine autrichien Martin Gerbert a publiée à la fin du siècle dernier, on trouve, sous le nom d'Odon, quelques traités concernant la musique (65), et deux traités concernant l'arithmétique ; l'un de ceux-ci est intitulé : *Regulæ domini Oddonis de Rhythmimachia*, et l'autre *Regulæ domini Oddonis super abacum*. Ces deux documents, trop peu remarqués, n'ont pas été cités, comme ils auraient dû l'être dans les discussions élevées sur l'*abacus* de Gerbert et sur l'origine de notre système de numération écrite. Nous verrons bientôt quelle est la date probable et quelle est l'importance historique de ces deux opuscules.

Quant aux traités plus récents sur l'*abacus*, M. Chasles en a parlé de manière à me dispenser d'y revenir ici (66).

(64) *Aperçu historique*, etc., note XII, trad. allem., p. 588-589, surtout note 227, et *Explication des traités de l'abacus*, etc., p. 1, note 1, et p. 61, note 1.

(65) *Scriptores ecclesiastici de musica sacra* (Saint-Blaise, 1784, 3 parties in-4), t. I, p. 247-303.

(66) *Explication des traités de l'abacus*, etc.; *Développements et détails histo-*

IV.

Gerbert n'est pas allé étudier chez les Arabes d'Espagne.

Maintenant il s'agit de savoir où Gerbert avait pris ses connaissances arithmétiques. Est-ce chez Boèce ? ou bien est-ce chez les Arabes? Telle est la question, dont la solution va être d'abord préparée par l'examen des documents historiques : elle sera donnée ensuite par l'étude des œuvres mêmes de Gerbert.

C'est une opinion généralement admise jusqu'à ces derniers temps, que Gerbert, disciple des Arabes, aurait introduit leur système de numération écrite chez les nations chrétiennes de l'occident. La source principale de cette opinion se trouve dans une assertion de Guillaume de Malmesbury (67), copiée par Vincent de Beauvais (68), et trop facilement acceptée par les écrivains postérieurs jusqu'à nos jours (69). Guillaume de Malmesbury dit que « Gerbert, enlevant le premier l'*abacus* aux Sarrasins, a donné des règles que les *abacistes*, en suant beaucoup, comprennent à peine. » Examinons quel degré de confiance mérite l'assertion de ce chroniqueur. Remarquons d'abord que ce moine anglais du XII[e] siècle, postérieur d'un siècle et demi à Gerbert et vivant dans un pays fort éloigné de ceux où Gerbert avait vécu, a pu être mal renseigné sur son compte. Ce soupçon se change en certitude, quand nous voyons que, par une erreur énorme, Guillaume de Malmesbury a confondu Gerbert, c'est-à-dire le pape Sylvestre II, avec le pape Jean XV (70). Geoffroy de Monmouth, le chroniqueur romanesque des rois de la Grande-Bretagne antérieurs à l'invasion saxonne, déclare (71) qu'il laisse à

riques, etc; *Recherche des traces du système de l'abacus*, etc. Voyez ci-dessus, note 5.

(67) *De rebus gestis regum Anglorum*, II, 10, fol. 36 recto (*Rerum anglicarum scriptores post Bedam præcipui*, ed. Savile, Londres, 1596, in-f°).

(68) *Speculum historiale*, XXIV, 98, p. 997 (Douai, 1624, in-f°).

(69) Elle l'a été notamment encore par Colebrooke, et par MM. de Sismondi, Montferrier et Pouchet (cités dans la note 1).

(70) *De rebus gestis regum Anglorum*, II, 10, fol. 35 verso — 36 recto (*Rerum anglicarum scriptores post Bedam præcipui*, ed. Savile.)

(71) *Historia regum Britanniæ*, XII, 20, p. 92 de la collection *Rerum britannicarum scriptores* (Lyon, 1587, in-f°). Dans cette même collection (p. 280-348), l'ouvrage de Guillaume de Malmesbury est donné comme anonyme et comme continuation de la chronique de Bède, tandis qu'il fait suite à l'ouvrage de Geoffroy de Montmouth.

son contemporain Guillaume de Malmesbury le soin de raconter l'histoire des rois anglo-saxons. Pour ne pas rester inférieur en agréments à Geoffroy, Guillaume insère dans son histoire, sous forme d'épisodes, les fables les plus incroyables. Par exemple, à propos d'une lettre du pape Jean XV, s'imaginant que Jean XV est Gerbert, il raconte que ce moine aquitain, s'échappant de son couvent et abjurant sa profession de moine, était allé en Espagne étudier chez les Arabes de Séville; que là, non content d'avoir appris beaucoup de choses, et notamment d'avoir enlevé le premier l'*abacus* aux Sarrasins, il avait volé un grimoire à son professeur arabe, et s'était donné au diable afin de l'avoir pour protecteur. Le grave historien raconte les prodiges que fit Gerbert avec cette assistance : ils sont comparables à ceux de l'enchanteur Merlin, ou, si l'on veut, dignes de figurer dans les *Contes des mille et une Nuits*. Toujours par cette même protection infernale, Gerbert était devenu archevêque et enfin pape; il trouvait une fausse sécurité dans un oracle diabolique à double entente; mais ensuite, désabusé, près de mourir et de tomber au pouvoir du démon, il pria les cardinaux réunis de lui rendre le service de déchirer son corps en morceaux, dans l'espoir que le diable se contenterait du corps et laisserait l'âme s'échapper. Ainsi la tradition qui fait de Gerbert un disciple des Arabes, auxquels il aurait emprunté notamment l'*abacus*, est liée avec une autre tradition, d'après laquelle Gerbert serait un moine apostat, qui, réfugié chez les Arabes de Séville, aurait conclu un pacte avec le diable et serait devenu ensuite archevêque et pape par sortilége. Nous allons scruter les origines de cette double tradition, et nous constaterons que dans ses deux parties cette tradition constitue une légende fabuleuse, qui, inconnue aux contemporains de Gerbert, s'est formée peu à peu autour de la mémoire de ce moine supérieur à son temps par son instruction puisée aux sources antiques.

Sur Gerbert, et spécialement sur la partie de sa vie à laquelle appartiendrait son séjour prétendu chez les Arabes, interrogeons les auteurs contemporains, en donnant la préférence à ceux qui ont dû le connaître le mieux.

Au premier rang, il faut placer le moine Richer, dont la chronique, dédiée à Gerbert, alors archevêque de Reims, et composée par ses ordres (72), s'arrête brusquement au milieu du récit de sa déposition, et n'offre plus, pour les temps postérieurs, que quel-

(72) *Richeri historiarum* lib. I, Dédicace à Gerbert, dans Pertz, *Monumenta Germaniæ historica*, t. V, p. 568.

ques lignes de notes éparses. La biographie de Gerbert tient une place notable dans cette chronique, et la vérité des faits y paraît fidèlement respectée, lors même que la conduite politique et religieuse de Gerbert est de nature à donner lieu à des accusations graves. Or, que nous apprend Richer (73)? Né en Aquitaine, et par conséquent sous la suzeraineté des rois de France, Gerbert avait été élevé chez les Bénédictins du couvent de Saint-Géraud à Aurillac, et il s'y était beaucoup distingué dans ses études. Borel, comte de Barcelonne, ou *duc de l'Espagne citérieure*, comme Richer l'appelle, vint visiter le couvent d'Aurillac. On lui demanda si dans son pays il y avait des hommes bien instruits dans les arts. Sur sa réponse affirmative, on le pria d'emmener avec lui un des moines d'Aurillac, qui achèverait de s'y instruire. Gerbert fut désigné, et, *avec le consentement des frères*, Borel l'emmena en Catalogne et le confia à Hatton, évêque de Vich (Vicus ausonensis), près duquel il étudia beaucoup les mathématiques. Borel et Hatton, allant à Rome, emmenèrent avec eux Gerbert et le présentèrent au pape, qui le prit en affection et écrivit à l'empereur Othon de le retenir pour instruire les Italiens tout à fait ignorants en mathématiques. L'empereur retint en effet Gerbert et le combla de faveurs.

Arrêtons-nous ici pour fixer à peu près la date et marquer la signification de ces faits racontés par Richer. L'empereur Othon dont il est ici question est Othon Ier le Grand; car Gerbert lui-même (47) dit qu'il a connu et servi fidèlement Othon Ier, Othon II et Othon III, l'aïeul, le fils et le petit-fils. Or, Othon le Grand est mort en 973. D'un autre côté, c'est en 967 que Borel a succédé à son père comme comte de Barcelonne (75). Il n'est pas probable que Borel ait fait le voyage d'Aurillac l'année même de son avénement, et certainement il s'écoula plus d'une année entre l'arrivée de Gerbert en Italie et la mort d'Othon le Grand, à qui il se vante d'avoir témoigné un attachement inviolable. Le savant éditeur de la chronique de Richer dans la collection de M. Pertz a donc raison de penser que le pape qui recommanda Gerbert à l'empereur est Jean XIII, mort en 972.

(73) *Richeri historiarum*, III, 43-45, t. V, p. 616-618 de la collection de Pertz. Comp. la chronique d'Hugues, abbé de Flavigny, t. X, p. 367 de la même collection.

(74) *Epistola* XXX, dans le recueil des lettres de Gerbert mis à la suite de celui de Masson par Duchesne (*Historiæ Francorum scriptores coætanei*, t. II, p. 836). Comp. *Epistola* V (*ibidem*, p. 829).

(75) *Ex gestis comitum Barcinonensium* (*Historiens des Gaules et de la France*, t. IX, p. 69 c.)

Le séjour de Gerbert en Catalogne doit donc se placer dans un intervalle de quatre ans environ, entre 968 et 972, mais doit probablement se resserrer dans un intervalle beaucoup moindre entre ces deux limites extrêmes. Il est peu vraisemblable que Gerbert ait passé une partie de ce temps si court hors des États de Borel chez les musulmans de Séville. Mais surtout le récit de Richer n'indique nullement et même ne permet pas de supposer ce séjour prétendu de Gerbert dans le khalifat de Cordoue. C'était le savoir des clercs de Catalogne que Borel avait vanté aux moines d'Aurillac; c'est près de l'évêque Hatton, et non à Cordoue ou bien à Séville, que Gerbert étudia les mathématiques, suivant l'affirmation expresse de Richer. Conquise par Charlemagne en 778, puis bientôt reprise par les Maures, la Catalogne, avec le secours de Louis, fils de Charlemagne et roi d'Aquitaine du vivant de son père, s'était soustraite définitivement au joug des infidèles dès l'année 812, c'est-à-dire à une époque où les sciences, qui commençaient à fleurir à Bagdad, ne s'étaient pas encore développées chez les Arabes d'Espagne. A l'époque de Gerbert, la Catalogne relevait de l'Aquitaine, avec laquelle elle était sous la suzeraineté du roi de France. Ainsi, en allant à Vich, Gerbert n'était pas même allé en pays étranger, bien loin d'être allé en pays mahométan. Pendant les premières années du pouvoir de Borel, il y avait trêve entre les infidèles et les chrétiens d'Espagne; mais l'état de guerre, suspendu par les dissensions des rois chrétiens et par la lassitude des musulmans, devait recommencer bientôt, en 976; Barcelonne devait tomber, en 984 ou 985, au pouvoir de Muhamad Almanzor, et être reprise quelques années après par Borel avec le secours de la France (76). La ville épiscopale de Vich, plus éloignée de la frontière, était moins exposée aux invasions musulmanes. Le témoignage de Richer et la vraisemblance ne permettent pas de supposer que Gerbert ait quitté l'évêque Hatton et le comte Borel, pour aller étudier chez les ennemis de leur religion et de leur nation, avant d'aller, avec ce même évêque et ce même comte, se présenter au pape, dont il obtint les bonnes grâces.

Le récit de Richer est d'ailleurs confirmé par une chronique du couvent d'Aurillac rédigée au XII[e] siècle. On y lit (77) que Gerbert, enfant pauvre, avait été élevé par charité dans cette abbaye, où il s'était distingué par ses progrès extraordinaires dans les lettres;

(76) *Ex gestis comitum Barcinonensium* (*Ibidem*, t. IX, p. 69 D E). Comp. M. Sédillot, *Histoire des Arabes*, V, 1, p. 264-265 (Paris, 1854, in-12).

(77) *Breve chronicon auriliacensis abbatiæ* (*Analecta vetera* de Mabillon, t. II, p. 237-238 vet. ed. (ou p. 350 nov. ed.)

qu'*avec la permission de ses supérieurs et par avidité de savoir, il avait parcouru beaucoup de royaumes;* qu'il avait été connu et estimé par l'empereur Othon, dont la faveur avait causé son élévation à la dignité archiépiscopale et enfin au souverain pontificat. Cette notice est vague et incomplète, puisqu'elle ne dit pas que Gerbert fut protégé par trois empereurs nommés Othon et par Hugues Capet; mais, dans ce qu'elle dit, elle est véridique, et elle mérite d'être crue, surtout en ce qui concerne la manière dont Gerbert était sorti de son couvent, d'autant plus qu'elle s'accorde parfaitement avec Richer, qui est seulement plus précis. La chronique ne nomme pas les *royaumes* que Gerbert avait parcourus; mais ce mot se rapporte naturellement à des états chrétiens : un fait aussi étrange, que l'aurait été pour les moines d'Aurillac le séjour volontaire du futur pape dans les écoles des infidèles, n'aurait pas été passé sous silence. Les lettres de Gerbert réfutent d'ailleurs la fable d'après laquelle il se serait échappé du couvent d'Aurillac : elles sont pleines des témoignages touchants de sa reconnaissance pour cet asile de son enfance et de sa jeunesse (78); par exemple, dans une lettre écrite en 986, il exprime ses regrets de la mort de son ancien supérieur l'abbé Géraud, et il se réjouit de l'élévation de Raimond, son ancien ami de couvent, à la dignité d'abbé (79).

Jetons maintenant un coup d'œil rapide sur la suite de la carrière de Gerbert, d'après ses œuvres et d'après les témoignages les plus dignes de foi. Othon le Grand lui avait donné l'abbaye de Bobbio en Piémont. Cet empereur étant mort en 973, les troubles de l'Italie forcèrent Gerbert à quitter son abbaye. Il vint en France, près d'Adalbéron, archevêque de Reims, dont il fut le confident et le secrétaire, en gardant des relations d'amitié avec Othon II, avec la princesse grecque Théophanie, épouse de ce prince, et surtout avec la princesse française Adelaïde, veuve d'Othon I[er]. Il fut l'instrument habile des menées politiques des prélats français contre les derniers rois carlovin-

(78) *Gerberti epistolæ*, XLV, XLVI, LXXI, XCI, XCII, CXXX du recueil de Masson, et *Epistolæ* IX et XXXV du recueil ajouté par Duchesne (t. II, p. 800, 806, 810, 811 B, 819, 820, 830 et 838 de la collection de Duchesne).

(79) Gerberti *epistola* XCI (t. II, p. 810 de Duchesne). La chronique de l'abbaye d'Aurillac s'exprime d'une manière obscure et semble confondre les temps, quand elle dit que *l'abbé Raimond* fit élever Gerbert au couvent d'Aurillac. Si Raimond, nommé abbé en 986 et félicité à cette occasion par Gerbert, alors secrétaire de l'archevêque de Reims, avait protégé autrefois l'éducation de Gerbert, c'était *avant d'être abbé*, comme d'ailleurs la chronique elle-même l'indique en nommant Raimond *sodalis Gerberti*. Cette même chronique dit que l'abbé Géraud avait terminé en 974 la construction d'une basilique commencée par son prédécesseur.

giens (80). Nommé écolâtre de l'abbaye bénédictine de Saint-Remi, à Reims, il eut pour élève Robert, fils d'Hugues Capet. Othon II étant mort en 984, Gerbert usa de toute son influence sur les évêques d'Allemagne en faveur du jeune Othon III, contre le roi de Bavière et les Carlovingiens de France, et contribua pour sa part à l'avénement de son protecteur Hugues Capet et de son élève Robert, bientôt associé à la dignité royale. Arnulfe, fils illégitime du roi carlovingien Lothaire, ayant prêté serment de fidélité à Hugues et ayant obtenu l'archevêché de Reims, Gerbert garda près du nouvel archevêque sa position de secrétaire, et prêta d'abord sa plume aux intrigues qui aboutirent à livrer une partie du nord de la France au carlovingien Charles, oncle d'Arnulfe et compétiteur d'Hugues Capet. Mais bientôt Gerbert rompit avec Arnulfe, contribua à sa déposition et fut mis à sa place en 992 par la faveur d'Hugues et de Robert. De concert avec Hugues, qui ne l'abandonna pas, il défendit avec violence contre la cour de Rome sa position d'archevêque et les prétentions gallicanes sous leur forme la plus exagérée. Après la mort d'Hugues, abandonné par Robert, qui réintégra Arnulfe, Gerbert se retira en 997 près d'Othon III, dont la protection lui procura en 998 l'archevêché de Ravenne, et en 999 le souverain pontificat, où il se distingua par son zèle pour la réforme des abus. Il mourut en l'an 1003.

Gerbert se fait connaître à nous surtout par ses lettres, par sa rédaction des actes de divers synodes concernant l'affaire d'Arnulfe et de l'archevêché de Reims, et par ses discours relatifs à cette même affaire, qui aboutit à sa déposition (81). Plusieurs de ces pièces présentent une apologie de sa vie, et par conséquent nous font connaître les griefs, quelquefois assez fondés, qu'on élevait contre lui. Nous voyons qu'on lui reprochait son ambition, ses intrigues, les tergiversations de sa conduite politique, les deux rôles trop différents qu'il avait joués à l'égard d'Arnulfe, les menées par lesquelles il avait supplanté ce prélat, et sa résistance trop peu respectueuse à l'autorité du pape. Dans une lettre adressée par lui aux évêques

(80) Voyez M. Mourin, *Quæ partes fuerint episcoporum in Capetianis ad regnum provehendis* (Angers, 1856, in-8).

(81) Voyez Duchesne, *Historiæ Francorum scriptores coætanei*, t. II, p. 789-844; Pertz, *Monumenta Germaniæ historica*, t. V. p. 658-693; Mabillon, *Analecta vetera*, p. 102-107 nov. ed. (ou t. II, p. 212 et seq. vet. ed.); les *Historiens des Gaules et de la France*, t. X, p. 512-535; les *Centuriateurs de Magdebourg*, t. III, p. 246 et suiv., et p. 279 et suiv.; Marlot, *Historia metropolis Remorum*, t. II, p. 213 et suiv., etc.

après sa promotion au souverain pontificat (82), on voit qu'il s'était attiré aussi bien des haines honorables pour lui par sa juste sévérité contre la simonie et contre les mauvaises mœurs. Dans aucune de ces pièces et dans aucun monument de l'époque on ne voit qu'il ait eu le moins du monde à se défendre contre des soupçons d'hétérodoxie ou de sortilége, soupçons que ses ennemis n'auraient pas manqué de motiver en rappelant sa fréquentation des écoles mahométanes d'Espagne, s'il en avait été réellement le disciple. On ne trouve contre lui aucune trace d'une accusation de ce genre chez aucun de ses contemporains (83).

Il nous reste une longue épitaphe en vers latins, très-honorable pour sa mémoire, écrite pour lui six ou sept ans après sa mort par son troisième successeur le pape Sergius IV, pontife irréprochable (84). Ditmar (ou Thietmar), évêque de Mersbourg, vivait au commencement du XI[e] siècle : il parle de l'éducation savante de Gerbert, de ses connaissances supérieures à celles de son temps en astronomie et dans les autres arts; il approuve sa nomination à l'archevêché de Reims, blâme sa déposition et loue l'empereur Othon de lui avoir accordé sa faveur en récompense de sa science et de ses services (85). Le moine bourguignon Raoul Glaber, et Helgaud, moine de Fleury-sur-Loire, sont de même du commencement du XI[e] siècle : ils racontent les faits principaux et incontestables de la vie de Gerbert, sans faire la moindre allusion à ses rapports prétendus avec les mahométans; Raoul Glaber (86) dit que Gerbert était de basse naissance, mais plein de talent et très-instruit dans

(82) *Analecta vetera* de Mabillon, p. 103-106 nov. ed. (t. II, p. 216 et seq. vet. ed.)

(83) Sur toute la biographie de Gerbert, voyez Baronius, *Annales ecclesiastici*, t. X, p. 926 — t. XI, p. 15, éd. du Vatican. Peu favorablement disposé pour le gallican Gerbert, Baronius le défend cependant contre ses calomniateurs (*ibidem*, t. X, p. 926-927, et t. XI, p. 13-15). Voyez aussi Kœler, *Dissertatio qua eximius in medio ævo philosophus Gerbertus injuriis tam veterum quam recentiorum scriptorum liberatur* (Altdorf, 1720, in-4), et M. Hock, *Gerbert oder Pabst Sylvester II und sein Jahrhundert* (Wien, 1837, in-8). L'ouvrage de M. Hock a été traduit en français par M. l'abbé Axinger (1843, in-8).

(84) Voyez cette épitaphe dans les *Annales* de Baronius, année 1003, t. XI, p. 13-15, éd. du Vatican. Gerbert n'est pas traité moins favorablement dans le *Catalogus paparum*, publié par Eckhard, et, après lui, par Muratori (*Rerum italicarum scriptores*, t. III, part. II, col. 338 B).

(85) *Ditmari chronicon*, lib. VI (*Historiens des Gaules et de la France*, t. X, p. 130-131, ou bien collection de Pertz, t. V, p. 635).

(86) *Radulphi Glabri chronicon*, l. I, p. 4 (*Historiens des Gaules et de la France*, t. X, p. 8).

les arts libéraux ; Helgaud (87) remarque que Gerbert fut un pape très-vertueux. Hermannus Contractus, moine allemand de l'abbaye de Reichenau en Suisse, dans la première moitié du XI[e] siècle, insinue contre Gerbert un seul reproche (88), celui d'avoir gagné la faveur d'Othon et l'archiépiscopat par une science trop mondaine. Ditmar, Raoul Glaber, Helgaud et Hermannus Contractus ont été contemporains de Gerbert et seulement plus jeunes que lui : ils ne paraissent pas s'être doutés plus que lui-même, ou que le pape Sergius IV, de la légende qui devait plus tard représenter Gerbert comme un moine violateur de ses vœux, un disciple des Arabes et un sorcier. Ces accusations contre sa mémoire paraissent avoir été également inconnues à Hugues, moine de Fleury, et à Romuald, archevêque de Salerne, qui, au XII[e] siècle, racontent brièvement la vie de Gerbert, en blâmant sévèrement son élévation irrégulière au siége archiépiscopal de Reims, mais en approuvant tout le reste de sa conduite (89). Elles sont réfutées implicitement par Richer et par la chronique de l'abbaye d'Aurillac, dont nous avons cité les témoignages. Elles le sont de même implicitement par une petite *Chronique de Verdun* (90), qui, faisant l'éloge de la science de Gerbert, l'appelle un *second Boèce*, bien loin de l'appeler un disciple des Arabes.

Cependant, parmi les compatriotes et contemporains de Gerbert, il y en a un qui, involontairement et sans y songer, a pu donner prétexte à cette légende injurieuse pour sa mémoire. Adémar, moine aquitain de la fin du X[e] siècle et du commencement du XI[e], n'est pas bien renseigné sur la première partie de la vie de Gerbert : il sait que Gerbert a quitté le couvent d'Aurillac pour aller au delà des Pyrénées ; mais il ne connaît ni l'occasion, ni le motif, ni les circonstances de ce voyage si bien expliqué par Richer : il dit à tout hasard, sans autre explication et sans aucune réflexion malveillante, que Gerbert était allé à Cordoue (91) ; il paraît ne pas savoir que Gerbert avait suivi le comte Borel, qui l'avait confié à Hatton, évêque de Vich en Catalogne. Le savant éditeur de la chronique d'Adémar dans la collection de M. Pertz remarque avec

(87) *Epitome vitæ Roberti regis* (*Ibidem*, t. X, p. 99).

(88) *Hermanni Contracti chronicon*, p. 270 (*Scriptores rerum Germanicarum* de Struve. Ratisbonne, 1726, in-f°).

(89) Voyez Hugues de Fleury, dans les *Historiens des Gaules et de la France*, t. X, p. 220, et Romuald, dans Muratori, *Rerum italicarum scriptores*, t. VII, col. 164.

(90) *Annales Virodunenses*, dans la collection de Pertz, t. VI, p. 8.

(91) *Ademari historiæ*, lib. III, t. VI, p. 130 de la collection de Pertz.

raison que le fait du voyage de Gerbert d'Aurillac à Cordoue reposerait sur l'assertion d'Adémar seul. Cette erreur innocente d'Adémar a pu donner plus tard lieu de supposer que Gerbert avait été le disciple des infidèles, et de là à l'accuser de magie il n'y avait qu'un pas (92).

Cependant, pour rencontrer contre Gerbert des accusations de cette nature, il faut descendre près d'un siècle après sa mort, et pour les trouver à cette époque nettement formulées et circonstanciées, il faut sortir de France. Après la fin de la maison impériale de Saxe, sous la maison de Franconie, un prélat allemand schismatique des dernières années du XIe siècle et du commencement du XIIe, nommé cardinal par l'antipape Guibert, un adversaire implacable de Grégoire VII, un calomniateur forcené de la mémoire de ce pape, un favori de l'empereur Henri IV, Bennon (93) a cru servir sa propre cause et celle de son maître, en prodiguant à presque tous les souverains pontifes, depuis Sylvestre II jusqu'a Grégoire VII, l'accusation de sortilége et de possession du démon, accusation grotesquement renouvelée par Luther ; les fables de Bennon sur Gerbert ressemblent assez à celles de Guillaume de Malmesbury, pourtant sans la confusion de Gerbert avec le pape Jean XV. A la même époque, le moine brabançon Sigebert de Gembloux (94) insinue qu'il serait bon de retrancher de la liste des papes le favori des empereurs saxons, Gerbert, ce personnage diabolique, arrivé au saint-siége par la grâce du démon. Nous avons vu quels développements la légende de l'éducation arabe de Gerbert et de son pacte avec le diable avait reçus de l'autre côté de la Manche, sous la plume romanesque de Guillaume de Malmesbury, chroniqueur digne peut-être de quelque estime quand il parle des affaires de son pays, mais

(92) Ascelin Adalbéron, évêque de Laon du temps de Gerbert, le désigne dans un poëme satirique par le surnom de *Neptanabus* : il le compare donc à l'ingénieux roi d'Égypte *Necténabo* de la légende d'Ésope. Cette allusion prouve que cette légende, racontée en grec, au XIVe siècle, par le moine Maxime Planude, que quelques-uns en ont cru l'inventeur, était déjà répandue au commencement du XIe siècle. Voyez *Adalberonis carmen ad Rotbertum regem*, v. 167 (*Historiens des Gaules et de la France*, t. X, p. 67). Comp. la note d'Adrien de Valois (*Ibidem*, p. 83).

(93) *De vita et rebus gestis Gregorii VII*, ed. Orthuini Gratii (in *Fasciculo rerum expetendarum et fugiendarum*, p. XXXIX-XLIII *b*. Cologne, 1535, in-f°). Il y a d'autres éditions, notamment celle de Jean Wolf, dans ses *Lectiones memorabiles*, t. I, p. 290 et suiv. (Lauing, 1600, in-f°). Comp. Fabricius, *Bibliotheca mediæ et infimæ latinitatis*, au mot *Benno*.

(94) *Sigeberti Gemblacensis chronicon*, dans la collection de Pertz, t. VIII, p. 353.

non quand il se donne carrière sur les anecdotes relatives aux affaires du continent, surtout pour les siècles passés.

Près d'un siècle aussi après la mort de Gerbert, on trouve en France quelques faibles traces d'une partie seulement de cette fable, et c'est dans le voisinage de l'Allemagne qu'on les rencontre d'abord. Hugues, moine lorrain de l'abbaye de Saint-Viton de Verdun, et plus tard abbé de Flavigny en Bourgogne, dans sa chronique écrite vers les dernières années du XIe siècle, dit faussement (95) que Gerbert avait été chassé du couvent d'Aurillac, et il l'accuse vaguement d'avoir employé des *prestiges* pour se faire élever à l'archevêché de Reims; mais il ne lui attribue nullement une instruction puisée chez les Arabes. Du reste, ce compilateur se contredit lui-même, en copiant ensuite sur les mêmes points le récit plus véridique de Richer. Dans la première moitié du XIe siècle, Orderic Vital, né en Angleterre, mais élevé en Normandie, au couvent de Saint-Évroult en Ouche, où il passa toute sa vie comme simple religieux, répète (96), sans y croire, un conte populaire d'après lequel Gerbert, étant écolâtre, aurait eu une conversation avec le démon, qui lui aurait prédit, en un vers énigmatique, sa grandeur future; avant de reproduire, sous toutes réserves, ce conte, qui du reste ne renferme aucune allusion à un voyage de Gerbert chez les Arabes d'Espagne, Orderic Vital avait parlé avec estime de la science de Gerbert, et n'avait blâmé en lui que son élévation *injuste* à l'archevêché de Reims. Dans la seconde moitié de ce même siècle, Guillaume Godel, moine de Saint-Martial de Limoges, mais Anglais de naissance, est assez mal renseigné sur Gerbert pour ignorer qu'il avait été élevé et fait moine au couvent d'Aurillac, et pour croire que son premier couvent avait été celui de Fleury (97); du reste, Godel répète sous une forme plus brève la légende racontée par son compatriote Guillaume de Malmesbury, mais en retranchant tout ce qui concerne les relations de Gerbert avec les Arabes. La même légende a été abrégée encore un peu plus, et avec la même suppression, dans

(95) *Historiens des Gaules et de la France*, t. X, p. 205 D et p. 206 BC, ou bien collection de Pertz, t. X, p. 366, l. 5, et p. 367, l. 46. Comp. p. 367, l. 35-38 de Pertz.

(96) *Historiens des Gaules et de la France*, t. X, p. 235.

(97) *Chronica Willelmi Godelli*, lib. III, *ibidem*, t. X, p. 260-261. Gerbert n'a jamais été moine de Fleury. Cette erreur, commise par Godel, a été accréditée au XIIIe siècle par Martin de Pologne, dans sa *Chronique des papes et des empereurs*, et au XIVe siècle par Amalric de Montpellier, dans sa *Chronique pontificale* (*Scriptores rerum italicarum* de Muratori, t. III, part. II, col. 336-338). Elle a été acceptée sans examen par beaucoup d'auteurs.

la chronique du frère André, moine du couvent d'Anchin en Flandre (98).

Enfin, vers les dernières années du XII[e] siècle, Gui de Bazoches, dit le Chanteur, qui croit que Gerbert est né à Reims, mais qui, du reste, reproduit les traits principaux de la narration de Guillaume de Malmesbury, donne place dans son récit au séjour prétendu de Gerbert chez les Arabes de Séville (99). Tout ce passage de Gui de Bazoches sur Gerbert est inséré au XIII[e] siècle dans la chronique d'Albéric, moine de l'abbaye de Trois-Fontaines en Champagne (100). En ce même siècle, Vincent de Beauvais, dans un passage de son *Miroir historial* (101), copie Guillaume de Malmesbury en ce qui concerne la première partie de la vie de Gerbert, sans omettre le voyage de Séville, le vol du grimoire, l'évocation du diable et la conquête de l'*abacus;* dans un autre passage (102), il copie le moine Sigebert sur la question de savoir si Gerbert ne devrait pas être retranché de la liste des papes.

Tout ce trésor de calomnies stupides, amassé par Bennon et par Guillaume de Malmesbury, recueilli par Sigebert, par Godel, par Gui de Bazoches, par Albéric et par Vincent de Beauvais, a passé dans la *Chronique des papes et des empereurs* (103), écrite vers la fin du XIII[e] siècle par Martin de Pologne, archevêque de Gnesen, l'un des premiers auteurs de la fable de la papesse Jeanne. Il serait inutile de dire ici les noms de tous les écrivains qui, depuis Vincent de Beauvais et Martin de Pologne, ont répété la légende fabuleuse de Gerbert.

Après avoir assisté, comme nous venons de le faire, à la formation de cette légende, nous ne pouvons trouver que M. de Sismondi ait fait preuve d'un discernement suffisant, en laissant de côté ce qu'elle contient de merveilleux, mais en acceptant des faits controuvés qui en sont le point de départ : il affirme (104), sans la moindre hésitation, que Gerbert, « oubliant son intolérance monacale, s'établit à Cordoue, la plus célèbre des universités arabes. »

(98) Lib. III, *Ibidem*, t. X, p. 289-290.

(99) *Ibidem*, t. X, p. 286 C. Comp. t. IX, p. 57.

(100) *Ibidem*, t. X, p. 286 C. C'est dans la chronique d'Albéric que se trouvent les textes de Gui de Bazoches.

(101) *Speculum historiale*, XXIV, 98, p. 977 (Douai, 1624, in-f°).

(102) XXIV, 107, p. 1001.

(103) *Chronique martinienne*, traduction française de Mamerot, éd. de Vérard (Paris, 1504, in-f°), partie II, chap. CLXXVIII, f. 119. Le texte latin de cette chronique a été publié à Bâle, 1599, in-f°.

(104) *Histoire de France*, t. IV, p. 52-53 (Paris, 1823, in-8).

— « On vit alors, disait aussi M. Henri Martin dans les premières éditions de son *Histoire de France* (105), on vit alors ce Gallo-Franc foulant aux pieds les haines nationales, ce moine catholique oubliant les préjugés monastiques et les haines religieuses, s'installer, entre les fils des chéiks et des imans de Mohammed, sur les bancs de l'université de Cordoue, centre et foyer glorieux de la civilisation musulmane. » Il est vrai que, dans la phrase précédente, M. Henri Martin avait dit avec plus de réserve : « *S'il faut en croire les traditions,* Gerbert ne resta pas dans l'Espagne chrétienne. » Cette formule faiblement dubitative ne suffisait pas; l'auteur lui-même l'a reconnu, et dans sa dernière édition il a mis au conditionnel tout ce récit légendaire. Mais la rédaction nouvelle garde encore l'inconvénient de laisser croire que le voyage et les études de Gerbert chez les musulmans sont un appendice douteux, mais vrai peut-être, ajouté par la tradition au récit bien certain du voyage de Gerbert chez les chrétiens de Catalogne à la suite du comte Borel. Or, au contraire, aucun des auteurs qui croient au voyage de Cordoue et de Séville ne parle ni des relations de Gerbert avec Borel, ni du voyage de Catalogne; et réciproquement aucun des auteurs qui ont connaissance de ces derniers faits ne dit un mot du voyage de Gerbert dans le khalifat de Cordoue, Il faut donc choisir entre ces deux versions, et non les coudre l'une à l'autre. L'examen que nous venons de faire des pièces du procès établit que Gerbert est allé avec Borel d'Aurillac à Vich, et, plus tard, de Vich à Rome, et que le fait du séjour de Gerbert à Cordoue ou bien à Séville, fait très-invraisemblable en lui-même, se trouve contredit implicitement par des témoignages contemporains et irrécusables, et ne repose sur aucun témoignage digne de confiance, mais sur l'assertion d'auteurs qui font preuve, soit de mauvaise foi, comme Bennon, soit de crédulité ridicule ou d'ignorance sur les points les mieux connus de la vie de Gerbert, comme ce même Bennon, Guillaume de Malmesbury, Sigebert, Godel, Gui de Bazoches, et même Adémar et Hugues de Flavigny, ou qui n'ont fait que copier leurs prédécesseurs, comme Albéric, Vincent de Beauvais et Martin de Pologne; et que, par conséquent, ce fait prétendu doit être effacé de la biographie de Gerbert.

Suivant mon honorable homonyme dans sa dernière édition, la vérité historique cachée sous toute cette légende, c'est que Gerbert

(105) *Histoire de France*, t. III, p. 24-25 (Paris, 1847, in-8). Comp. 4ᵉ édition, t. III, p. 25-26 (Paris, 1855, in-8).

avait reçu des Arabes, sinon directement, du moins par l'intermédiaire des chrétiens d'Espagne, l'*abacus* et d'autres connaissances que les Arabes eux-mêmes tenaient de l'antiquité grecque. Ce serait en effet à cette conclusion qu'il faudrait s'arrêter, si l'influence arabe se montrait dans les écrits de Gerbert, et si son *abacus* en particulier était d'origine arabe. Mais trouve-t-on la trace de cette influence dans les écrits de Gerbert? Est-ce aux Arabes qu'il doit sa méthode de l'*abacus?* Les Arabes eux-mêmes employaient-ils cette méthode sous cette forme et la tenaient-ils des Grecs? Telles sont les questions qui nous restent à examiner, et pour chacune desquelles nous trouverons une réponse négative.

§ V.

Gerbert a été l'héritier de la tradition gréco-latine, qui lui a été transmise par les Latins et non par les Arabes.

Remarquons d'abord qu'il n'y a pas dans les œuvres de Gerbert un seul mot qui indique qu'il ait eu des relations quelconques avec les Arabes. Une seule de ses lettres concerne les Arabes d'Espagne; c'est celle (106) où, écrivant au nom d'Hugues Capet à Borel, comte de Barcelone, il lui promet le secours du roi de France, son suzerain, contre les *Ismaélites*. Une autre lettre de Gerbert concerne les Arabes d'Orient : c'est celle (107) où, parlant au nom de l'Église de Jérusalem, dévastée par le kalife Hakem, il donne le premier signal des croisades, en appelant les chrétiens à réunir leurs armées contre les infidèles, pour délivrer le tombeau du Christ.

Dans son traité sur l'*abacus* adressé sous forme de lettre *à son ami Constantin* (108), il ne dit pas un mot qui indique un emprunt fait aux Arabes; il se plaint d'être forcé par les instances de cet ami à traiter une matière sur laquelle, dit-il, depuis plusieurs lustres, il n'a lu aucun livre et n'a pratiqué aucun exercice. Cependant il annonce que, rassemblant ses souvenirs, il répétera tantôt en substance, tantôt *littéralement*, ce qu'il a lu autrefois. Or, les expressions employées par Gerbert dans cet opuscule ne trahissent nullement une

(106) *Epistola* CXII, t. II, p. 815-816 de la collection de Duchesne. Com. *Ep.* LXXI, *ibidem*, p. 806.

(107) *Ep.* XXVIII, t. II, p. 794 de la collection de Duchesne.

(108) Voy. le texte publié par M. Chasles, *Explication des traités de l'abacus*, etc., p. 61-65. Comp. ce qui a été dit plus haut, § 3.

origine arabe (109); ce sont les mêmes expressions que Boèce avait employées pour le même usage dans les textes de sa *Géométrie*, expliqués par M. Chasles; les procédés que Gerbert expose sont, avec plus de développements, ceux que Boèce tenait du géomètre latin Archytas, et auxquels Archytas attribuait une origine pythagoricienne. C'était évidemment dans les textes de la *Géométrie* de Boèce relatifs à l'*abacus*, ou dans des traités latins rédigés d'après les mêmes principes et avec les mêmes expressions techniques, que Gerbert avait étudié les règles de cette méthode de calcul. Plusieurs lettres de Gerbert concernent ses études (110); il n'y est pas fait la moindre allusion aux savants arabes; il y parle beaucoup de ses efforts pour trouver et faire copier des manuscrits des auteurs latins de l'antiquité; dans une de ces lettres, il se félicite précisément d'avoir à sa disposition la *Géométrie* de Boèce (111), où, par conséquent, il a pu lire le texte relatif à l'*abacus*. Dans une lettre du recueil publié par Masson (112), l'empereur Othon III, Allemand par son père, mais Grec par sa mère, prie Gerbert « de ranimer chez lui le génie vivace *des Grecs*, dont une étincelle survit, dit-il, au milieu de la rusticité saxonne, et de lui enseigner l'arithmétique dans un livre qui le mette en état de comprendre quelque chose de la *subtilité des anciens*. » La réponse de Gerbert à Othon (113) est une lettre d'envoi de l'ouvrage demandé; elle fait allusion aux spéculations philosophiques des Grecs sur les nombres, et nullement aux travaux des Arabes. J'ai dit qu'il m'a été impossible de m'assurer si le traité envoyé par Gerbert à Othon, et dont un fragment est

(109) Il est vrai que le mot *abaq*, très-analogue au mot *abacus*, existe en hébreu avec le sens de *poussière*, et que le *Talmud* donne ce nom à la poussière sur laquelle les mathématiciens écrivaient avec le doigt. Voyez M. Vincent, *Des notations scientifiques de l'école d'Alexandrie*, partie I, p. 9, note 1. Mais, d'un autre côté, le mot *ἄβαξ* dans la langue grecque et le mot *abacus* dans la langue latine existaient dès une haute antiquité avec le sens général de *tableau*. Or l'*abacus* de Boèce est un *tableau* destiné à recevoir les chiffres. Du reste, peu nous importerait que les néopythagoriciens d'Alexandrie, inventeurs, comme nous le verrons (§ 7), de la méthode de l'*abacus*, eussent emprunté ce mot à la langue hébraïque, plutôt qu'à la langue grecque ou à la langue latine. Il nous suffit de savoir que c'est aux textes latins de Boèce et de ses imitateurs, et non à la langue arabe, que ce mot a été emprunté directement par Gerbert.

(110) *Epistolæ* VII, VIII, IX, XLIV, LXXXVII, CXXX, CXXXIV du recueil de Masson, et *Epistolæ* XIII et XV du recueil ajouté par Duchesne (*Rerum francicarum scriptores coætanei* de Duchesne, t. II, p. 790-791, 799, 809, 819-820 et 831-832).

(111) *Ep.* VIII du recueil de Masson (t. II, p. 790 de Duchesne).

(112) *Ep.* CLIII du recueil de Masson (t. II, p. 824 de Duchesne).

(113) *Ep.* CLIV du même recueil (t. II, p. 825 de Duchesne).

peut-être conservé dans un manuscrit de Ratisbonne, est réellement différent de l'opuscule adressé à Constantin (114). Du reste, en supposant que ce soit un autre ouvrage, les deux lettres citées prouvent qu'il se rattachait à la tradition grecque et romaine et non à une tradition arabe.

De même, il n'y a rien d'arabe, soit dans la petite leçon d'arithmétique donnée par Gerbert dans une lettre à Rémi, moine de Trèves (115), soit dans sa *Géométrie* et dans sa *Lettre à Adalbold*, publiées par Pez (116), soit dans les renseignements qu'il envoie à son ami Constantin sur la construction d'un astrolabe armé de tubes sans verres pour observer les astres (117), soit dans ce fait, attesté par Ditmar, que Gerbert, construisant à Magdebourg un cadran solaire pour l'empereur Othon, fit usage d'un tube pour viser l'étoile polaire (118), sans doute afin de trouver ainsi la hauteur du pôle, et, par conséquent, la latitude du lieu, ou bien la méridienne de son cadran. Les anciens n'ignoraient pas qu'un tube peut servir à fixer la direction du rayon visuel et en même temps à faire voir

(114) Voyez plus haut, § 3.

(115) *Ep.* CXXXIV du recueil de Masson (t. II, p. 820 de Duchesne).

(116) *Thesaurus anecdotorum novissimus*, t. III, part. II, col. 5 et suiv. (Augsbourg, 1721, in-f°). Comparez l'analyse qui a été donnée de cet ouvrage et de cette lettre par M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, note XII, p. 586-588 de la trad. allem. de M. Sohnke.

(117) *Analecta vetera* de Mabillon, p. 102 nov. ed. (t. II, p. 212 vet. ed.). Comp. Richer, *Historiarum*, III, 50-53, t. V, p. 617-618 de la collection de Pertz.

(118) *Ditmari* (ou *Thietmari*) *chronicon*, VI, 6, t. V, p. 635 des *Monumenta germaniæ historica* de Pertz (ou bien t. X, p. 130-131 des *Historiens des Gaules et de la France*). Comp. Richer, t. V, p. 617-618 de Pertz. La mention de l'observation de l'étoile polaire pour la construction de l'*horologium* prouve que c'était un *horologium solare*. Sans cette circonstance, on pourrait supposer que c'était une clepsydre à cadran (*horologium ex aqua*) avec complication de rouages, dans le genre de celle qui est décrite par Vitruve (*De architectura*, IX, 8 (9), t. I, p. 260-263 de Schneider), ou bien de celle que Boèce, à la prière de Théodoric, fit pour être envoyée, avec un cadran solaire, à Gondebaud, roi de Bourgogne. Voyez Cassiodore, *Variarum Ep.* I, 45 et 46. L'horloge envoyée à Charlemagne par Haroun-al-Raschid était de même une clepsydre compliquée de rouages, et n'était qu'une imitation d'une invention grecque. Voyez M. Pouchet, *Histoire des sciences naturelles au moyen âge*, p. 51. L'orgue hydraulique de Gerbert se rapportait de même à une invention grecque de Ctésibius, perfectionnée par Héron (*Mathematici veteres*, p. 227-230. Paris, 1693, in-f°) et décrite par Vitruve (X, 8 (13), t. I, p. 285-287 de Schneider), ou bien à d'autres inventions grecques plus simples, décrites par Héron (*Mathematici veteres*, p. 226-227) et rappelées par Cassiodore (*Variarum Ep.*, I, 45). Comp. M. Vincent, *Essai d'explication de quelques pierres gothiques* (Mém. de la Société des Antiquaires de France, t. XX, p. 1 et suiv.).

plus nettement les objets (119); ces tubes sans verres ne ressemblaient à nos télescopes que par leur forme extérieure. Quant aux cadrans solaires, les Grecs et les Latins s'en étaient beaucoup occupés (120): à côté de constructions très-savantes pour ces cadrans, ils en avaient aussi de fort simples et de fort imparfaites, par exemple celles qui avaient pour but de donner les heures du jour pour les douze mois de l'année, d'après les longueurs des ombres d'un style vertical sur un plan horizontal, en supposant que le rapport de ces longueurs aux heures restât invariable pendant la durée d'un mois, et que ce rapport fût le même pour deux mois à peu près également éloignés d'un même solstice; beaucoup de textes anciens se rapportent à des cadrans de cette espèce, dont on retrouve une courte description dans un opuscule du moyen âge, inséré parmi les œuvres de Bède (121). Nous ignorons de quelle espèce était le cadran tracé par Gerbert à Magdebourg. Quant à l'astrolabe décrit par lui dans une lettre au moine Constantin, c'est un instrument extrêmement simple et grossier : la construction des instruments arabes était bien plus savante (122).

M. Jourdain, qui admet sans examen le préjugé général sur l'origine arabe du savoir mathématique de Gerbert, déclare pourtant qu'il n'a trouvé aucune preuve de connaissance de la langue arabe dans ses ouvrages, qui, dit-il, annoncent plutôt l'étude des Grecs que des Arabes (123). Pour ce qui concerne en particulier la méthode

(119) Voyez Aristote, *De la génération des animaux*, V, 1, et Strabon, *Géographie*, III, p. 138 C de Casaubon.

(120) Voyez surtout Vitruve, IX, 7 et 8 (8 et 9), t. I, p. 256-264 de Schneider, et Ptolémée, *De analemmate*, trad. lat. de Commandini (Rome, 1562, petit in 4°). Comp. Martini, *Abhandlung von den Sonnenuhren der Alten* (Leipzig, 1777); Van Beeck Calkoen, *Dissertatio de horologiis veterum sciothericis* (Amst., 1797), et M. Wœpke, *Disquisitiones archæologico-mathematicæ circa solaria veterum* (Berlin, 1848, in-4°).

(121) Voyez Aristophane, *Harangueuses*, v. 652; Eubulus et Ménandre dans Athénée, I et VI, p. 8 B c et p. 243 A de Casaubon; Lucien, *le Songe ou le Coq*, c. IX, et *Cronosolon*, c. XVII; Plutarque, *du Flatteur et de l'Ami*, c. V; Théodore cité par Saumaise, *Exercitationes plinianæ in Solinum* (Utrecht, 1689, in-f°), p. 455; Hesychius, aux mots Δωδεκάποδος, Ἑπτάπους σκιὰ et Σκιᾶς; Julius Pollux, *Onomasticon*, I, 8, § 72, et VI, 8, § 44; Suidas, au mot Δεκάπους σκιά; Palladius, *De re rustica*, à la fin de chacun des livres II-XIII, et le traité *De horologio* dans les œuvres de Bède, t. I, col. 392-393 (Cologne, 1612, in-f°).

(122) Voyez Gerbert, *De sphæræ constructione* (cité dans la note 55). Comp. M. J. J. Sédillot, *Traité des instrum. astronom des Arabes*, *traduit d'Aboul-Hassan* (1834 et 1835, 2 vol. in-4°), et M. L. Am. Sédillot, *Matériaux pour servir à l'hist. comparée des sciences mathémat. chez les Grecs et chez les Orientaux*, partie III, p. 289-364 (Paris, 1845, in-8).

(123) *Recherches critiques sur l'âge et l'origine des traductions latines d'Aristote*, 1re édition, p. 99 (Paris, 1819, in-8).

de l'*abacus* de Gerbert et de Boèce, nous verrons bientôt qu'il y avait des différences caractéristiques entre cette méthode et la manière de calculer des Arabes, à qui Gerbert n'a rien emprunté sur ce point (124).

En attendant cette dernière preuve de notre opinion sur l'origine de l'*abacus*, nous pourrions nous contenter des remarques qui précèdent. Cependant consultons sur la même question un contemporain de Gerbert, son disciple, Bernelin de Paris. Dans son traité *De l'abacus*, adressé à l'abbé Amélius, qui l'avait prié d'écrire sur ce sujet, Bernelin (125) dit qu'il ose à peine aborder une matière si difficile, sur laquelle on n'avait presque aucune lumière avant que son maître Gerbert eût commencé à l'éclaircir ; et il ajoute qu'Amélius aurait mieux fait de s'adresser aux Lorrains, chez qui, dit Bernelin, cette étude est plus florissante que partout ailleurs. De ce témoignage irrécusable rapproché de celui de Richer, il résulte que Gerbert n'avait pas rapporté de Catalogne un système de numération emprunté aux Arabes, mais qu'avec l'aide des lumières puisées dans l'école épiscopale de Vich, il avait éclairci un système de numération écrite et de calcul, connu dès longtemps chez les chrétiens d'Occident, trop négligé par eux dans ces temps d'ignorance et conservé mieux qu'ailleurs en Lorraine.

Enfin consultons l'auteur d'un traité *De l'abacus* écrit vers la fin du XI[e] siècle, Raoul, mort évêque de Laon en 1131. Dans cet opuscule, Raoul admet que la méthode de l'*abacus* vient de l'antiquité classique ; mais il dit que cette méthode était tombée en désuétude chez les nations occidentales, et que Gerbert et Hermann l'ont remise en pratique (126). Cet Hermann, personnage de très-noble naissance, surnommé *Contractus* parce que tous ses membres étaient repliés sur eux-mêmes par des ankyloses, était un savant moine bénédictin du couvent de Reichenau en Suisse, au commencement du XI[e] siècle. Nous avons vu (127) qu'il trouvait mauvais que Gerbert fût arrivé aux grandes dignités ecclésiastiques par des études trop profanes. Cependant Hermann, qui n'aspirait pas à

(124) Voyez plus loin, § 6.

(125) Voyez Bernelin, cité dans l'*Histoire littéraire de France*, t. XII, Avertissement, p. 20. Il est question de la pratique de l'*abacus* dans une lettre adressée à Hermannus Contractus par son disciple Meinzo, écolâtre de Constance (manuscrit latin, n° 7377 C de l'ancien fonds de la Bibliothèque impériale de Paris, fol. 46 v°).

(126) Voyez le texte de Raoul cité par M. Chasles, *Développements et détails historiques sur divers points du système de l'abacus*, p. 21-22.

(127) § 4, note 88.

l'épiscopat, avait cru pouvoir se livrer sans scrupule à ce même genre d'études, et ce n'est pas sans raison que son nom se trouve associé ici à celui de Gerbert. M. Jourdain a parfaitement établi qu'on n'a aucun motif de croire qu'Hermannus Contractus ait su l'arabe ou se soit trouvé en rapport avec des savants arabes, et que si, depuis le XV[e] siècle seulement, on lui a attribué la connaissance de la langue et des ouvrages arabes, c'est parce qu'on l'a confondu mal à propos avec deux écrivains postérieurs, l'un du XIII[e] siècle, l'autre du XIV[e], Hermannus Allemannus et Hermann de Schildis (128). M. Jourdain, qui sait bien que la philosophie arabe n'a pénétré en Occident chez les Chrétiens qu'au XIII[e] siècle, n'hésite pas à renvoyer à leurs véritables auteurs, c'est-à-dire à Hermannus Allemannus et à Hermann de Schildis, les traités philosophiques tirés de l'arabe qu'on a faussement attribués à Hermannus Contractus. Cependant il hésite à lui retirer de même deux traités astronomiques pleins de mots arabes, et il ne lui paraît pas impossible qu'Hermannus Contractus eût pris ces mots dans des traductions latines plus anciennes. Mais nous verrons tout à l'heure que les traductions latines faites sur l'arabe n'ont guère été plus hâtives pour les ouvrages de mathématiques que pour les ouvrages de philosophie. Il est vrai que, suivant la remarque de M. Jourdain, Albert le Grand a connu l'un de ces deux traités astronomiques d'Hermann; mais cela n'empêche pas qu'Hermannus Allemannus n'en soit l'auteur, puisque cet Hermannus vivait vers 1240, et puisque Albert le Grand n'est mort qu'en 1280. D'ailleurs, ce traité astronomique connu d'Albert le Grand pourrait être d'Hermann le Dalmate, qui, en 1143, traduisait de l'arabe en latin le planisphère de Ptolémée (129). Ainsi ce n'est point un arabisant que Raoul de Laon cite comme le continuateur de l'œuvre de Gerbert pour la propagation de la méthode de l'*abacus*. En outre, il résulte des expressions de Raoul que ce n'était pas là une méthode nouvelle empruntée aux Arabes, mais une méthode ancienne chez les Latins et tirée de l'oubli par Gerbert et par Hermann. Enfin, Bernelin, disciple de Gerbert, nous a dit que cette méthode s'était conservée mieux qu'ailleurs en Lorraine, c'est-à-dire bien loin de l'influence des Arabes d'Espagne.

Ce n'est pas tout : entre l'époque de Boèce et celle de Gerbert,

(128) *Recherches critiques*, etc., 1[re] édition, p. 144-158.

(129) Voyez M. Jourdain, articles *Hermannus* dans la *Biographie universelle* de Michaud, 1[re] édition, et *Recherches critiques*, etc., 1[re] édition, p. 155-157 (comp. *ibidem*, p. 101-105).

nous trouvons un traité *De l'abacus*, dont l'origine antique et nullement arabe ne peut être révoquée en doute. Dans une autre dissertation (130), j'ai déjà parlé de ce jeu pythagoricien nommé ἀριθμομαχία (*bataille des nombres*), qui, au moyen âge, s'est conservé sous le nom altéré *Rythmomachia* ou *Rythmimachia* et que quelques érudits du XVIe siècle ont voulu remettre en honneur. Ici je n'aurais pas à mentionner ce jeu, si le traité de Saint-Odon intitulé *Rythmimachia* ne devait pas être rapproché d'un traité du même auteur, intitulé *De abaco*. Ces deux opuscules ont été, comme je l'ai dit, imprimés à la fin du siècle dernier par les soins de Martin Gerbert, abbé de Saint-Blaise, en Autriche (131). Or, le premier de ces deux traités trahit son origine grecque par son nom tout altéré qu'il est, et l'auteur a raison d'attribuer aux pythagoriciens ce jeu auquel Platon paraît avoir fait allusion, ainsi que je l'ai montré ailleurs (132). La méthode de l'*abacus*, décrite par le même auteur dans le second opuscule, a de même une origine antique. En effet, cette méthode, connue de Boèce et attribuée par lui aux pythagoriciens, est essentiellement la même dans la *Géométrie* de Boèce, dans l'opuscule de Gerbert adressé au moine Constantin et dans l'opuscule de saint Odon *Sur l'abacus*.

Il reste à examiner si l'auteur de ce dernier opuscule est bien certainement saint Odon, antérieur à Gerbert. Dans l'édition et dans les manuscrits, le traité *De l'abacus* et celui qui a pour objet le *jeu pythagoricien de la bataille des nombres* sont joints aux traités d'Odon concernant la musique : le nom de l'auteur, *Domini Oddonis*, est répété en tête de ces deux traités intitulés *Regulæ de abaco* et *Regulæ de Rythmimachia*, de même qu'en tête des traités musicaux. Il y a donc tout lieu de croire que l'auteur de tous ces traités est le même. Or, suivant le témoignage d'un anonyme de l'abbaye de Mœlk en Autriche (133), qui écrivait au XIIe siècle une notice sur cent dix-sept écrivains ecclésiastiques, le principal de ces traités sur la musique est l'œuvre de saint Odon, abbé de Cluny au commencement du Xe siècle. C'est donc au même saint Odon qu'il faut très-vrai-

(130) *Le nombre nuptial et le nombre parfait de Platon, explication d'une énigme mathématique qui se trouve au commencement du VIIIe livre de la République* (*Revue archéologique*, XIIIe année, 1856, p. 257-287).

(131) Voyez plus haut, § 3, note 65.

(132) *Le nombre nuptial*, etc., § 6, p. 272-273 (*Revue archéologique*, 15 août 1856).

(133) Anonymus Mellicensis, *De scriptoribus ecclesiasticis* CXVII, publié par Pez à la fin du volume intitulé *Bibliotheca benedictino-mauriana* (Augsbourg, 1716, in-8), et par Fabricius, *Bibliotheca ecclesiastica* (Hambourg, 1718, in-f°).

semblablement attribuer les traités sur le *jeu pythagoricien* et sur l'*abacus*. Ainsi la méthode de l'*abacus*, telle qu'on la trouve chez le moine Gerbert à la fin du Xe siècle, était connue dès le commencement de ce siècle par le saint abbé de Cluny, qui certes n'était pas allé la chercher à Séville ou à Cordoue chez les mahométans, mais qui l'avait trouvée sans doute dans la *Géométrie* de Boèce, ou bien qui l'avait prise dans quelque opuscule plus récent, mais rédigé d'après les mêmes principes.

Gerbert, venu un demi-siècle après Odon, n'a pas puisé à une autre source. Richer, dans sa chronique adressée à Gerbert, alors archevêque de Reims, loue le savant moine aquitain d'avoir importé *en France*, c'est-à-dire dans la France proprement dite, par opposition à l'Aquitaine, l'étude de la musique, de l'astronomie et de la géométrie, et, pour faciliter les calculs géométriques, d'avoir fait faire des figures mobiles représentant les neuf chiffres, et d'avoir fait fabriquer un *abacus*, sorte de casier où ces chiffres recevaient une valeur de position (134): pour la connaissance de la méthode de ces calculs, Richer renvoie au traité adressé par Gerbert à l'écolâtre Constantin. Suivant la remarque de M. Chasles (135), ce traité même prouve que l'*abacus* était connu antérieurement chez les chrétiens d'Occident; car, au lieu de débuter, comme Boèce, par une description de l'*abacus* et de la manière d'y poser les chiffres, Gerbert suppose cette connaissance préliminaire, et s'applique tout de suite à indiquer, avec plus de détails que Boèce ne l'avait fait, la méthode des multiplications et des divisions à effectuer sur l'*abacus*. Bernelin et Raoul Glaber avaient donc raison de signaler le système de l'*abacus* comme négligé, mais non absolument inconnu en France avant Gerbert, et par conséquent le fait de l'existence d'un traité de l'*abacus* rédigé par saint Odon un demi-siècle avant Gerbert, n'a rien qui doive nous étonner. D'après les raisons que j'ai données, je pense que l'authenticité de ce traité est certaine. Mais, quand bien même elle serait douteuse, les témoignages des contemporains de Gerbert et l'examen même de son ouvrage sur l'*abacus* démontrent, comme nous venons de le voir, qu'en écrivant sur ce sujet, Gerbert n'a pas introduit le premier chez les chrétiens une méthode arabe, mais expliqué et remis en honneur une vieille méthode latine consignée dans un ouvrage de Boèce.

En résumé, il est possible que Bède ait écrit un opuscule sur

(134) Richeri *historiarum*, III, 43-54, dans la collect. de Pertz, t. V, p. 616-618.

(135) *Explication des traités de l'abacus et particulièrement du traité de Gerbert*, p. 5-6.

l'*abacus;* mais celui qu'on a mis dans le recueil de ses œuvres est de Gerbert, avant qui la même méthode avait été exposée certainement par Boèce vers la fin du V[e] siècle ou vers le commencement du VI[e], et presque certainement aussi par saint Odon, abbé de Cluny, au commencement du X[e] siècle. Cependant, à l'époque de Gerbert, vers la fin de ce même siècle, cette méthode était peu comprise et peu cultivée en France et en Allemagne, où elle fut propagée par les écrits de Gerbert et par les soins d'Hermannus Contractus; elle était encore moins connue en Italie, où, suivant le témoignage de Richer, les mathématiques étaient profondément ignorées à l'époque du pape Jean XIII et du premier voyage de Gerbert en ce pays. Cette même méthode était un peu mieux connue et pratiquée en Lorraine, suivant le témoignage de Bernelin. Gerbert, qui a contribué à la remettre en honneur, l'avait trouvée dans la tradition latine, qui remonte à Boèce, et non chez les Arabes, qui la possédaient, comme nous le verrons, sous une forme notablement différente, destinée à prévaloir chez les peuples chrétiens, mais seulement plus tard, à partir du milieu du XII[e] siècle. A l'époque de Gerbert, suivant le témoignage de Richer, *les arts* étaient florissants chez les chrétiens de Catalogne. Les connaissances que Gerbert a rapportées de l'école de Vich prouvent que les sciences léguées par l'antiquité n'y étaient pas négligées. Je ne prétendrai point que l'influence du voisinage des Arabes et de l'émulation entre les deux civilisations rivales et ennemies ne fût pour rien dans ce mouvement des esprits en Catalogne. Mais ce que l'étude des faits ne me permet pas d'admettre, c'est que cette influence fût directe et transmise des Arabes aux chrétiens par l'enseignement et par les livres; c'est que les notions scientifiques professées à Vich, celles que Gerbert y a recueillies, fussent celles des Arabes, comme Andres l'a prétendu (136) et comme M. Henri Martin, dans la dernière édition de son *Histoire de France*, paraît aussi le croire. La suite de cette dissertation confirmera de plus en plus l'opinion contraire.

(136) Voyez Andres, *Dell' origine, dei progressi e dello stato attuale d'ogni letteratura*, t. I, cap. IX (Parma, 1782 et suiv., 8 vol. in-4). Au contraire, Goujet (*De l'état des sciences en France depuis la mort de Charlemagne jusqu'à celle du roi Robert*, p. 55) a bien dit que le voyage de Gerbert en Espagne est réel, mais que ce voyage *n'a pas eu le motif qu'on lui attribue*, c'est-à-dire que Gerbert n'est pas allé y chercher les leçons des Arabes.

VI.

Origine latine de l'*abacus* et de notre système de numération écrite.

L'origine latine et non arabe de l'*abacus* de Gerbert et de Boèce est rendue manifeste par des observations d'un autre ordre, que M. Vincent (137) a établies et dont voici le résumé : parmi les noms donnés aux *apices* dans les manuscrits de Boèce et dans divers traités du moyen âge sur l'*abacus*, les uns sont tirés de la langue hébraïque, et non de la langue arabe ; les autres sont tirés de la langue grecque et s'expliquent par les idées pythagoriciennes et gnostiques sur les nombres ; les figures de tous ces neuf *apices* s'expliquent par ces mêmes idées, dont quelques-unes paraissent avoir une origine égyptienne ; une de ces figures, celle qui signifie 4, est la *croix ansée* des Égyptiens, représentant, suivant l'interprétation la plus probable, la *clef de la vie divine, de la vie future* (138), de même que le nombre 4 était nommé par les pythagoriciens le *porte-clef de la nature*, κλειδοῦχος τῆς φύσεως (139). J'ajouterai que des figures tout à fait analogues à celles des chiffres 1, 2, 3, 4 et 9 des manuscrits de Boèce se trouvent employées dans la vieille écriture hiératique de l'Égypte, pour exprimer ces mêmes nombres pris comme ordinaux dans l'indication des jours de la lunaison ou des jours du mois solaire, et qu'il y a une ressemblance moindre, mais remarquable encore, entre les neuf apices de Boèce et les signes hiératiques égyptiens pour les neuf nombres cardinaux correspondants (140). Or, nos neuf chiffres, qui diffèrent notablement des chiffres employés dans les vieux manuscrits arabes, dérivent

(137) *Note sur l'origine de nos chiffres et sur l'abacus des pythagoriciens* (*Journal de mathématiques de M. Liouville*, t. IV, p. 261, juin 1839, *Notices et extraits des manuscrits*, t. XVI, IIe partie, p. 143 et suiv.), et *Des notations scientifiques à l'école d'Alexandrie*, Ire partie, *Signes numériques* (*Revue archéologique*, p. 601, IIe année).

(138) Voyez M. Vincent, *Des notations scientifiques*, etc., p. 5 du tirage à part. Aux autorités qu'il cite ajoutez M. Raoul-Rochette (*Institut*, *Académie des inscriptions*, t. XVII, IIe partie, p. 134-135, et p. 375-387.

(139) Voyez Nicomaque, dans la *Bibliothèque* de Photius, cod. 187, p. 141 de Bekker (Berlin, 1824, in-4°).

(140) Voyez Champollion, *Grammaire égyptienne*, p. 208-238 ; M. Brugsch, *Grammaire démotique*, § 132, p. 59, et M. Gardner Wilkinson, *Manners and customs of the ancient Egyptians*, 3e édition, t. IV, p. 197-199, planche 19, Ire partie.

évidemment de ceux qu'on trouve dans les manuscrits de Boèce et dans les manuscrits des traités de l'*abacus* rédigés aux Xe, XIe et XIIe siècles (141).

Quant à notre *zéro*, il se trouve dans ces mêmes manuscrits latins avec sa forme ronde actuelle. Cependant le texte de Boèce n'en parle pas et ne suppose pas l'emploi de ce signe. Mais je remarque, après Delambre (142), que le zéro, avec cette même forme ronde et avec un usage parfaitement analogue à celui qu'il a conservé chez nous, était employé par les Grecs anciens, dans la notation des degrés du cercle et des divisions sexagésimales du degré, pour indiquer l'absence d'unités d'une certaine espèce dans le nombre complexe ; mais que ce même signe ne pouvait pas leur servir, comme il nous sert aujourd'hui, pour désigner l'absence d'un certain ordre de puissances de 10 dans un nombre simple, parce que chez eux le *zéro* se serait confondu par sa forme avec la lettre grecque ο signifiant 70. Un monument curieux, expliqué par M. Bœckh (143), semble prouver que les Grecs ont employé quelquefois pour cet usage un autre signe équivalant ainsi tout à fait à notre *zéro*. Mais l'emploi de ce signe a été chez eux exceptionnel et très-rare sans doute, attendu que dans leur notation, où les lettres n'avaient pas une valeur de position, le *zéro* n'était pas nécessaire. De même, quand le système de l'*abacus* dit *de Pythagore* eut été inventé, les neuf chiffres suffirent sans le *zéro*, parce que les colonnes marquaient les places vides, et Boèce ne paraît pas avoir connu un dixième chiffre pour l'usage de l'*abacus*. Cependant les Romains, disciples des Grecs, avaient dû naturellement leur emprunter l'usage du *zéro* de forme ronde dans la notation des divisions du cercle ; plus tard, ce *zéro* grec put facilement s'introduire dans les places vides de l'*abacus* romain, pour marquer qu'elles étaient laissées vides avec intention et non par oubli. M. Chasles (144) a montré qu'il s'y est introduit en effet de cette manière par une simple modification du système de

(141) Voyez M. Chasles, *Sur le passage du premier livre de la géométrie de Boèce*, etc., p. 7 et 8; *Aperçu historique*, etc., note XII, p. 532-533 de la trad. allem. de M. Sohnke; *Explication des traités de l'abacus*, etc., p. 20 et 39, et M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, p. 100

(142) *Histoire de l'astronomie ancienne*, III, 1, *Arithmétique des Grecs*, t. II, p. 13-15. Voyez aussi M. de Humboldt, *Cosmos*, t. II, IIe partie, chap. V, note 19, trad. franç., p. 543.

(143) *Index lectionum quæ in universitate litteraria Friderico-Guilelma per semestre æstivum A.* 1841 *instituentur*, p. II-XII. Berolini, 1841.

(144) *Sur l'origine de notre système de numération*, p. 5-7 ; *Développements et détails historiques sur divers points du système de l'abacus*, § 9, p. 16-17, etc.

l'*abacus*. Dans les manuscrits des traités latins de l'*abacus*, le zéro se trouve tantôt avec le nom latin *rotula*, qui exprime sa forme, tantôt avec un autre nom, *sipos*, qui, suivant l'étymologie la plus vraisemblable, vient du mot grec ψῆφος (*jeton à compter*, *rond*, *cercle*) et exprime par conséquent la même idée (145). Au contraire, le signe arabe pour le zéro est un simple point (146). Il est vrai que, suivant un scholiaste arabe cité par M. Nesselmann, la figure du *zéro* des Arabes était plus anciennement celle de leur 5 actuel, identique à celle du *zéro* des Juifs (147) ; mais cette figure elle-même n'était pas tout à fait celle de notre zéro. Quant au nom arabe du *zéro*, c'est le mot *sifr* signifiant *vide*, ou *sahrâ sifr* signifiant *espace vide :* ce nom indique le rôle du *zéro* et non sa figure, et les Arabes n'ont jamais appliqué ce nom aux autres chiffres (148). A partir du XIII[e] siècle seulement, ce nom arabe a remplacé chez les peuples de l'Europe occidentale le nom plus ancien *sipos* ou *rotula*, employé jusqu'alors par les *abacistes ;* le mot *sahrâ* est devenu *zéro*, et le mot *sifr*, en grec τσίφρα (149), en français *chiffre*, a fini par être appliqué abusivement à tous les dix caractères numériques (150).

Voilà les faits. Voici maintenant ce qu'il en faut conclure. Si la méthode de notation écrite qui a été consignée par Gerbert dans son traité adressé à Constantin, et qui a été propagée par lui et par ses imitateurs chez les peuples chrétiens de l'Occident, venait des Arabes, nous trouverions dans ce traité et dans ceux dont il fut le modèle, les neuf chiffres sous leur forme vraiment arabe, au lieu de

(145) Voyez M. Chasles, *Développements et détails historiques*, etc., § 9, p. 14-17, et *Sur l'origine de notre système de numération*, p. 7. M. Vincent propose, avec moins de vraisemblance, un mot hébreu qui signifie *vase* et qu'il rapproche des mots grecs σιφνὸς et σιφλὸς signifiant *vide* (*Des notations scientifiques à l'école d'Alexandrie*, 1[re] partie, *Revue archéologique*, II[e] année, p. 601, ou p. 8, note 2 du tirage à part). M. Nesselmann veut que *sipos* vienne de *cifr*. Mais l'emploi du mot *sipos* a précédé l'influence arabe, qui a amené le mot *chiffre* au XII[e] ou au XIII[e] siècle. sur l'étymologie hébraïque attribuée au mot *abacus*, voyez plus haut la note 109.

(146) Voyez M. de Humboldt, *Cosmos*, t. II, II[e] partie, chap. V, note 19, trad. franç., p. 542.

(147) Voyez M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, p. 102-103, note 1. Comp. M. Vincent, *Des notations scientifiques à l'école d'Alexandrie*, 1[re] partie, p. 9, note 2.

(148) Voyez M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen.*, p. 102-103, note 1, et p. 495-496, et M. de Humboldt, *Cosmos*, t. II, II[e] partie, chap. V, note 19, trad. franç., p. 541.

(149) Voyez Maxime Planude, cité par Wallis, *Mathesis universalis*, c. IX, *De figuris numeralibus* (*Operum*, t. II, p. 48-49).

(150) Voyez M. Chasles, cité dans la note 145, et M. Nesselmann, cité dans la note 148.

les y trouver sous la forme des *apices* de Boèce ; nous y trouverions, suivant la manière arabe, ces chiffres écrits avec valeur de position sans colonnes tracées d'avance et avec le zéro représenté par un point, au lieu d'y trouver l'emploi des colonnes de l'*abacus* de Boèce ; nous y trouverions des expressions tirées de l'arabe, au lieu d'y trouver des expressions empruntées par Boèce au géomètre latin Archytas. C'est donc bien aux Latins, et non aux Arabes, que Gerbert doit sa méthode de numération écrite.

Cette conclusion, qui n'a contre elle qu'un préjugé né d'une légende fabuleuse, nous a été indiquée par l'examen critique de la biographie de Gerbert, et par une revue générale de ses œuvres; elle nous a été dictée impérieusement par les témoignages historiques sur les origines de la méthode de l'*abacus*, par l'étude des plus anciens traités sur cette méthode et surtout de celui de Gerbert, par la ressemblance complète de ces traités avec le passage reconnu authentique de la *Géométrie* de Boèce, et par la différence constatée entre tous les détails accessoires de cette méthode et les détails correspondants de la méthode arabe. Cette même conclusion, à laquelle tout nous conduit ainsi forcément, s'accorde d'ailleurs parfaitement avec des faits généraux qu'il convient de rappeler ici pour la confirmer. Gerbert vivait dans la seconde moitié du X[e] siècle, et est mort en 1003. Il a composé le traité que nous avons de lui sur l'*abacus*, tandis qu'il était écolâtre à Reims, c'est-à-dire avant 992. Or, il est vrai qu'à cette époque le développement du génie scientifique des Arabes, moins avancé en Occident qu'en Orient, où il avait commencé plus tôt et où il eut son principal foyer, avait fait cependant des progrès considérables dans les écoles du khalifat de Cordoue ; mais l'heure de l'influence extérieure de ce génie en Occident n'était pas encore venue. C'est dans la seconde moitié du XI[e] siècle, un siècle environ après la composition du traité de Gerbert sur l'*abacus*, que Constantin l'Africain et son disciple Jean firent les premiers connaître aux Latins la médecine arabe (151). C'est au XII[e] siècle seulement que la philosophie arabe a commencé à se répandre chez les peuples latins (152). C'est de même seulement au XII[e] siècle, c'est-à-dire plus d'un siècle après la mort de Gerbert, que pour la première fois des ouvrages mathématiques arabes fu-

(151) Voyez M. Jourdain, *Recherches sur l'âge et l'origine des traductions latines d'Aristote*, 1[re] édition, p. 97-98, et M. Choulant, *Handbuch der Bücherkunde für die æltere Medicin*, § 70, p. 253-256.

(152) Voyez M. Jourdain, l. c., chap. III, fin du § 8, p. 125, et M. Renan, *Averroès et l'averroïsme*, II[e] partie, chap. II, p. 158 et suiv.

rent traduits en latin par Platon de Tivoli, par Gérard de Crémone, par Adelard de Bath et par d'autres (153). Pour l'arithmétique en particulier, l'influence arabe fut loin d'être plus hâtive. Car ce qu'on trouve non-seulement dans les traités d'arithmétique de saint Odon et de Gerbert, mais dans ceux de tous les auteurs chrétiens de l'Occident jusqu'après le milieu du XIIe siècle (154), ce n'est pas la numération arabe sans colonnes tracées d'avance : c'est l'*abacus* de Boèce avec ses colonnes, avec ses *apices* distincts des chiffres employés par les Arabes, et sans le *zéro*, ou bien avec ce chiffre sous une forme qui vient des Grecs, ainsi que nous l'avons établi, et sous le nom latin de *rotula*, ou sous le nom de *sipos*, qui, comme nous l'avons vu, ne vient pas non plus de l'arabe. Aucun des contemporains de Gerbert n'a eu la pensée d'assigner aux connaissances mathématiques de ce moine une origine arabe. Mais au XIIe siècle et au XIIIe, lorsque les Arabes étaient devenus les oracles de la science, on s'avisa de supposer que Gerbert avait dû s'instruire à leur école, et alors il fut accusé, comme Adelard de Bath, d'y avoir puisé les principes d'une magie diabolique.

L'origine latine de la notation arithmétique de Gerbert étant bien établie, il s'agit maintenant de faire la part de Gerbert et celle des Arabes dans la formation de notre système de numération écrite, et pour cela nous n'avons non plus qu'à tirer la conclusion des faits qui viennent d'être exposés. Dans une *Histoire des mathématiques pures* publiée récemment, l'auteur, M. Arneth (155), exprime sur cette question une opinion dont les points les plus importants peuvent se résumer dans les deux propositions suivantes : 1° Le système de l'*abacus* décrit par Boèce et par Gerbert différait *essentiellement* de notre système de numération par l'absence du *zéro* et par l'emploi nécessaire de colonnes tracées d'avance et portant en tête l'indication écrite des différents ordres d'unités; 2° notre système de numération, dans lequel l'emploi du *zéro* dispense de

(153) Voyez M. le prince Boncompagni, *Delle versioni fatte da Platone Tiburtino*, etc. (Roma, 1851, 42 pages grand in-4); *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese, traduttore del secolo duodecimo, e di Gherardo da Sabbionetta, astronomo del secolo decimoterzo* (Roma, 1851, 109 pages grand in-4); Fabricius, *Bibliotheca mediæ et infimæ latinitatis*, au mot *Adelardus Bathonensis*, et M. Jourdain, *Recherches critiques sur l'âge et l'origine des traductions latines d'Aristote*, chap. III, § 3, p. 99-105, et note K, p. 283-306 (1re édition, Paris, 1819, in-8).

(154) Voyez M. Chasles, *Développements et détails historiques sur divers points du système de l'abacus*.

(155) *Geschichte der reinen Mathematik*, p. 207-209 (Stuttgart, 1852, in-8). Comp. *ibidem*, p. 213 et p. 216.

tracer des colonnes, ne nous est pas venu de Gerbert, mais bien réellement des Arabes. J'admets les faits exprimés dans la première proposition ; mais je les apprécie d'une autre manière. Je pense avec M. Chasles, qu'entre notre système de numération écrite et celui de l'*abacus*, non-seulement il n'y a aucune différence de principe, mais la différence pratique n'est pas bien considérable. Quant à la seconde proposition, nous venons de voir que les peuples chrétiens de l'Occident au moyen âge sont arrivés de l'*abacus* à notre système actuel par un progrès naturel, que l'influence arabe est venue seulement seconder.

Voici, en résumé, les conséquences qui me paraissent résulter de toute la discussion précédente. L'*abacus* avec neuf chiffres nous est venu des Latins, qui l'avaient dès l'époque de Boèce : le zéro s'y étant introduit indépendamment de l'influence arabe, l'emploi de ce signe complémentaire avait préparé l'abolition des colonnes tracées d'avance, et par conséquent l'établissement complet de notre système moderne de numération écrite. Cette dernière transformation du système de l'*abacus* s'est opérée à partir de la fin du premier tiers du XIIe siècle ; elle a été sinon amenée, du moins propagée et rendue vulgaire dans l'Europe occidentale, par l'exemple des Arabes, qui eux-mêmes, pour leur notation arithmétique, étaient disciples des Indiens (156). Alors, les colonnes ayant disparu, le nom d'*abacus* s'est effacé peu à peu avec elles et a laissé prédominer le nom arabe d'*algorisme* (157).

Pourtant, dans les traités de l'*algorisme* de même que dans les traités de l'*abacus*, la série des neuf chiffres, précédée ou non du *zéro*, a continué de s'écrire de gauche à droite suivant l'ordre décroissant de 9 à 1, parce que les colonnes de l'*abacus* de Boèce avaient leurs nombres ordinaux décroissants de gauche à droite, suivant la direction ordinaire de l'écriture latine : et c'est encore là un indice de l'origine latine de ces traités, ainsi que M. Chasles l'a parfaitement expliqué. Au contraire, les ouvrages d'arithmétique traduits de l'arabe en nos langues européennes présentent la série des chiffres précédée du *zéro* et écrite de gauche à droite, suivant l'ordre croissant de 1 à 9, parce que dans les textes arabes écrits de

(156) Voyez plus loin, § 8.

(157) Voyez M. Chasles, *Recherches des traces du système de l'abacus après que cette méthode a pris le nom d'algorisme* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, 24 juillet 1843). Sur l'étymologie arabe du mot *algorisme*, voy. M. Vincent, *des Notations scientifiques de l'école d'Alexandrie*, 1re partie, p. 10, P. S., p. 23.

droite à gauche cette même série se présente de droite à gauche suivant ce même ordre (158).

Quant aux Grecs du Bas-Empire, ils ont reçu aussi, avant le commencement du XIVe siècle, le système arabe et indien, exposé par le moine Maxime Planude, qui l'avait puisé aux sources arabes (159), et qui, pour cette raison, a écrit la série des chiffres suivant l'ordre croissant de 1 à 9. Nous verrons que probablement les Grecs n'avaient pas eu antérieurement le système de l'*abacus*, dont ils pouvaient se passer mieux que les Latins.

VII.

Antécédents de l'*abacus* de Boèce chez les Grecs et chez les Romains.

Telle me paraît être l'histoire vraie de notre notation arithmétique depuis l'époque de Boèce, où on la trouve sous une première forme imparfaite et peu répandue, jusqu'au XIIIe siècle, où cette

(158) En d'autres termes, en tête des colonnes de l'*abacus*, Boèce lisait et écrivait de gauche à droite, *suivant l'ordre décroissant*, la série des chiffres 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, et à son exemple les auteurs des traités *De l'abacus* et *De l'algorisme* ont lu et écrit de même cette même série de chiffres. Au contraire, les Arabes ont lu, *suivant l'ordre croissant*, la série des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, mais en écrivant cette série de droite à gauche, parce que telle est la direction habituelle des écritures sémitiques. A l'exemple des Arabes, tous les traducteurs européens de leurs traités d'arithmétique ont lu de même, *suivant l'ordre croissant*, cette même série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, mais en écrivant de gauche à droite, parce que telle est la direction constante des écritures européennes. Il est donc bien clair que, dans cet usage parfaitement indifférent de ranger les neuf chiffres *suivant l'ordre décroissant*, les auteurs des traités *De l'abacus* et *De l'algorisme* ont suivi l'exemple de Boèce, et nullement l'exemple des Arabes, qui avaient adopté l'ordre contraire. Voyez M. Chasles, *Développements et détails historiques sur le système de l'abacus*, § 5, p. 7-9, et note supplémentaire, p. 27-28. Quant à l'usage d'énoncer les grands nombres en commençant par les unités de l'ordre le plus élevé, par exemple, de dire *mil huit cent cinquante-six*, et non *six*, *cinquante*, *huit cents et mille;* cet usage général, et qui n'est pas du tout indifférent, a une raison d'être non moins générale et indépendante de la variété des systèmes de chiffres et des manières de les poser de gauche à droite ou de droite à gauche en vue des calculs à exécuter. En effet, quand on parle, c'est pour se faire comprendre le mieux et le plus promptement possible. Or, en commençant par énoncer les unités de l'ordre le plus élevé, dès le premier mot on apporte à l'esprit une notion approximative de la grandeur du nombre total, et ensuite on complète progressivement cette notion par l'énonciation successive des unités des ordres inférieurs.

(159) Voyez le traité inédit de Maxime Planude, intitulé : Ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς, dans les manuscrits grecs 2381 et 2382 de la Bibliothèque impériale de Paris. Comp. M. Chasles, cité dans la note 158.

notation a reçu sa forme définitive et où elle est employée partout en Europe.

Essayons maintenant de faire remonter nos recherches au delà de l'époque de Boèce. M. Arneth (160) pense que le système de l'*abacus*, tel qu'il a été décrit par Boèce, avait été connu de tous les mathématiciens grecs depuis Pythagore, mais qu'ils n'en ont tiré aucun parti à cause de l'incommodité de ce tableau à colonnes, qui, suivant lui, n'a jamais dû être employé réellement dans la pratique. M. Chasles (161), qui du reste paraît croire aussi à la haute antiquité de l'*abacus* dit *de Pythagore*, montre fort bien que ce tableau n'était pas si incommode, et qu'il a été bien réellement en usage chez les nations occidentales au moyen âge, où on le traçait habituellement avec le doigt sur une table polie et couverte de poudre pour recevoir les calculs. Il ne faut pas s'étonner que cette méthode se soit propagée en Occident plus qu'en Grèce; car, en Occident, le système de l'*abacus* était venu disputer la place à la numération écrite des Romains, à laquelle il était préférable. En effet, dans cette numération, il fallait deux ou plusieurs caractères pour exprimer tel ou tel nombre au-dessous de 10, tel ou tel des multiples les plus simples de 10 ou de ses puissances : ce qui était très-incommode pour écrire les calculs.

M. Chasles (162) remarque avec raison que le système de l'*abacus* aurait été bien moins utile aux Grecs, dont la notation arithmétique, employant les lettres de leur alphabet jointes à un petit nombre de caractères complémentaires, exprimait toujours, comme la nôtre, par un seul caractère chaque nombre d'unités d'un ordre décimal quelconque. Mais ce savant semble croire que la numération écrite des Grecs, sauf l'inconvénient minime d'employer un nombre total un peu plus grand de signes, équivalait à la nôtre dans la pratique. Cette opinion me paraît trop favorable au système grec. En effet, tandis que dans chaque opération partielle nous pouvons ne considérer que la valeur individuelle de chaque chiffre, ou du moins de chaque tranche de deux chiffres, indépendamment de sa valeur de position, pour les Grecs, au contraire, chaque nombre partiel représenté par une lettre entrait toujours dans chaque opé-

(160) *Geschichte der reinen Mathematik*, p. 207-209.

(161) *Développements et détails historiques sur divers points du système de l'abacus*, § 17, p. 25-27. Comp. *Aperçu historique*, etc., note XII, p. 540-541 de la trad. allem. de M. Sohnke, et *Éclaircissements sur le traité* De numero arenæ *d'Archimède*.

(162) *Aperçu historique*, etc., note XII, p. 540-541 de la trad. allem.

ration partielle du calcul avec sa valeur complète comme multiple d'une des puissances de 10; or, ainsi que Delambre (163) l'a expliqué parfaitement et en détail par des exemples, il résultait de là des complications qui rendaient les calculs plus lents, plus incommodes et plus pénibles qu'ils ne le sont pour nous. Je pense donc que, si Pythagore avait été l'inventeur de l'*abacus* qu'on lui attribue, et si les Grecs avaient connu cet *abacus* pendant toute l'époque florissante et progressive de leur science mathématique, ils n'auraient pas dédaigné cette invention de leur grand philosophe, mais ils s'en seraient servis, et surtout ils en auraient parlé, et un auteur latin de la fin du Ve et du commencement du VIe siècle de notre ère n'aurait pas été le premier à nous en transmettre le souvenir. Il est vrai que dans l'*Arénaire* d'Archimède il n'y a aucun texte qui prouve d'une manière positive que l'auteur ignorât le système de l'*abacus* dit *de Pythagore* (164). Mais, devant le silence de tous les auteurs grecs et latins jusqu'à Boèce, il faudrait de bonnes preuves pour admettre la haute antiquité de cet *abacus*. Or, en faveur de cette antiquité, on ne peut citer qu'un seul témoignage, celui de Boèce. Voyons ce que ce témoignage signifie. Boèce (165) nous dit avoir tiré le système de l'*abacus* d'un *géomètre latin non méprisable*, nommé Archytas. Il est évident que ce géomètre *latin* n'est pas le célèbre pythagoricien *grec* Archytas de Tarente. Un peu plus loin (166), Boèce nous dit que l'*abacus* a été imaginé *par des pythagoriciens*; il ajoute que ces pythagoriciens, dont il n'indique nullement l'époque, donnèrent à l'*abacus* le nom de *table de Pythagore, en l'honneur de leur maître*, parce qu'ils tenaient de lui la *première* indication de ce qu'ils avaient tracé (*quia hoc quod depinxerant magistro præmonstrante cognoverant*). Or, on sait que les pythagoriciens de toutes les époques aimaient à rapporter à Pythagore la première origine de toutes leurs découvertes et lui en faisaient honneur. D'ailleurs, les anciens pythagoriciens avaient remarqué (167) que la numération grecque *se replie sur elle-même, quand elle est arrivée à* 10, pour compter les dizaines comme des unités d'un ordre supérieur;

(163) *Histoire de l'astronomie ancienne*, livre III, chap. I, *Arithmétique des Grecs*.

(164) Voyez M. Chasles, *Éclaircissements sur le traité* De numero arenæ *d'Archimède* (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 11 avril 1842).

(165) *Geometriæ* lib. I, p. 1516 (Œuvres, Bâle, 1570, in-f°).

(166) *Ibidem*, p. 1518.

(167) Voyez le faux Plutarque, *Des opinions des philosophes*, I, 3, § 16; la *Théologie arithmétique*, c. 10, p. 59 d'Ast (p. 60 de Wechel), et Aristote, *Métaphysique*, XIII, 8, p. 1084, col. 1, l. 12 (Œuvres d'Aristote, éd. de Berlin.)

qu'arrivée à dix dizaines, elle se replie de nouveau sur elle-même pour compter les centaines comme des unités d'un ordre plus élevé encore, et ainsi de suite. Cette remarque, qui pouvait fort bien remonter réellement à Pythagore lui-même, n'impliquait pas nécessairement la notion de la valeur de position des chiffres; mais elle pouvait en être considérée comme une *indication anticipée* (*præmonstratio*), suivant l'expression même de Boèce. Le texte de cet auteur, même en supposant qu'il doive être pris au pied de la lettre comme expression d'un fait historique, ne nous empêche donc nullement d'attribuer à des néopythagoriciens d'une époque peu antérieure à la sienne la première application de la méthode de l'*abacus* telle qu'il l'expose. En effet, les noms et les figures des *apices* expriment des idées pythagoriciennes. Mais ces idées sont mêlées de gnosticisme; ces noms sont empruntés les uns à la langue grecque, les autres à l'hébreu, et ils sont très-altérés; et quelques-unes de ces figures appartiennent à l'écriture antique des Égyptiens (168). Cette invention porte donc le cachet d'une époque où la fusion s'était opérée sous la domination romaine entre les idées grecques et les symboles des Égyptiens et des Orientaux, c'est-à-dire le cachet de l'époque du néoplatonisme alexandrin, par exemple de l'époque de Proclus, qui est peut-être aussi celle du géomètre latin Archytas. Cette invention a été faite peut-être par des Grecs ou du moins dans un des foyers de la science grecque; elle a été faite en Égypte, probablement à Alexandrie; mais elle a été faite surtout au profit des peuples latins, qui en avaient grand besoin à cause de l'incommodité extrême que leur numération écrite présentait dans les calculs: ainsi s'explique naturellement la présence des lettres grecques à côté des chiffres romains dans certains manuscrits des textes latins relatifs à l'*abacus* (169). Faite ainsi surtout pour les Latins, peut-être par quelque grec écrivant en latin, comme le géomètre Archytas cité par Boèce, il est peu surprenant que cette invention tardive ait eu peu de cours chez les Grecs, à qui leur numération écrite, moins imparfaite que celle des Romains, pouvait plus facilement suffire pour la pratique des calculs.

Du reste, dans l'histoire de l'arithmétique grecque et romaine, on trouve les antécédents et la préparation du système de notation arithmétique décrit par Boèce. En commençant par les Grecs, nous voyons qu'ils ont eu plusieurs modes de numération écrite pour les

(168) Voyez plus haut, § 6.
(169) Voyez M. Chasles, *Développements et détails historiques*, etc., § 5, p. 7.

inscriptions et dans l'usage littéraire; mais attachons-nous à leur numération écrite la plus générale et reçue dans l'usage scientifique. Elle était strictement décimale, comme leur numération parlée. Les lettres qui tenaient lieu de nos chiffres s'y plaçaient exactement de la même manière que dans notre notation moderne, à laquelle les Grecs seraient immédiatement arrivés, si, au lieu de prendre de nouvelles lettres pour représenter les divers nombres de dizaines, de centaines, de milliers, ils avaient repris les lettres qui expriment les nombres d'unités simples, et s'ils avaient introduit aux places vides le *zéro*, qu'ils employaient à cet usage dans l'expression des divisions et des subdivisions du cercle (170). Ce qui a empêché les Grecs d'arriver de bonne heure à ce changement si simple, qui aurait été pourtant un perfectionnement notable, c'est qu'ils en étaient précisément trop près pour en sentir vivement le besoin. Cependant leur numération parlée et écrite se prêtait difficilement à l'expression des nombres très-grands : elle procédait par tranches de quatre chiffres, dont la première contenait les nombres jusqu'à 10 000 exclusivement ; la seconde les *myriades ;* la troisième les *myriades de myriades ;* la quatrième les *myriades de myriades de myriades*, et ainsi de suite. Cette répétition du mot *myriade* était incommode dans la numération parlée. Dans la notation écrite, on se débarrassait quelquefois de la répétition de ce même mot ou de la lettre initiale M, en séparant simplement les tranches par un point; il y avait donc là une valeur de position attribuée aux tranches. Dans chacune d'elles, plusieurs ordres d'unités pouvaient manquer (171); quand une tranche manquait tout entière, un intervalle vide entre deux points servait peut-être à en marquer la place. Archimède, dans son *Arénaire* (172), ne s'est nullement proposé de remplacer le système grec par un autre, mais bien de modifier ce système de manière à s'en servir pour exprimer par la parole et par l'écriture des nombres énormes, dont il avait besoin pour l'objet spécial de cet opuscule (173): il a réuni les deux premières tranches de quatre chiffres en une tranche de huit chiffres allant jusqu'aux *myriades de myriades* exclusivement; les nombres de cette tranche ont été

(170) Voyez plus haut, § 6.

(171) Voyez Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne*, liv. III, chap. I, *Arithmétique des Grecs*, et M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, chap. III, *Ueber Zahlensysteme und Zahlenzeichen*, p. 74-81.

(172) Wallisii operum t. III, p. 513 et seq.

(173) Voyez M. Chasles, *Éclaircissements sur le traité* De numero arenæ *d'Archimède* (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 11 avril 1842).

nommés par lui *premiers nombres*; les unités simples d'une seconde tranche de huit chiffres sont des *myriades de myriades;* les nombres de cette tranche sont les *seconds nombres;* et ainsi de suite pour les tranches de huit chiffres suivantes. Il est donc évident que c'est là une extension et une simplification de la numération parlée des Grecs en ce qui concerne les nombres très-grands, plutôt qu'un perfectionnement de leur numération écrite. Pour arriver du système grec à notre numération écrite moderne par la modification des tranches, bien loin de donner à chacune de ces tranches huit chiffres au lieu de quatre, il aurait fallu, suivant la remarque de Delambre (174), les réduire chacune à un seul chiffre, ce qui serait revenu à les supprimer, de telle sorte que la valeur de position se produisît dans le passage de chaque chiffre au chiffre suivant.

La numération parlée des Romains était décimale, comme celle des Grecs et comme la nôtre. Mais leur numération écrite n'avait que cinq signes individuels, savoir: I pour 1, V pour 5, X pour 10, L pour 50, C pour 100; auxquels on peut ajouter deux signes composés : IↃ pour 500 et CIↃ ou M pour 1000; on exprimait les nombres intermédiaires en répétant ces mêmes signes, comme additifs, à la droite du signe d'ordre immédiatement supérieur, ou bien en les plaçant, comme soustractifs, à la gauche de ce signe; et pour exprimer un certain nombre de milliers, on mettait le signe de ce nombre, comme multiplicateur, à la gauche du signe CIↃ ou M. On pouvait aussi écrire les nombres de milliers à la gauche des centaines, en les en séparant par un point, ou bien en mettant une barre au-dessus. On pouvait réunir ces deux moyens, et mettre à la gauche des centaines les unités de mille et les dizaines de mille séparées des centaines par un point, et plus à gauche encore les nombres de centaines de mille surmontés d'une barre. Ainsi les signes $\overline{\text{XVI}}$ LXVI.IↃCLXVI signifiaient 1666666. On trouve ici, comme dans la numération écrite des Grecs, une analogie très-imparfaite avec la valeur de position de nos chiffres (175). Dans une compilation byzantine faussement attribuée à Julius Africanus, dont les *Cestes* sont seulement une des sources où le compilateur a puisé (176), on lit (177) que les

(174) *Histoire de l'astronomie ancienne*, liv. III, chap. I, t. II, p. 8-10.

(175) Voyez les exemples tirés des manuscrits des auteurs anciens et cités par Heilbronner, *Historia matheseos universæ*, IV, 1, § 9 et 10, p. 732-734, et M. Nesselmann, l. c., p. 86-91.

(176) Voyez mon Mémoire *Sur Héron d'Alexandrie*, p. 337-364, surtout p. 360-361.

(177) *Cestes de Julius Africanus*, c. LXXVI, p. 135 des *Veteres mathematici* (Paris, 1693, in-f°). Comp. M. Vincent, *Notices et extraits des manuscr.*, t. XVI, II° partie, p. 360-362.

Romains, dans leurs signaux par le feu, représentaient à l'aide d'un petit nombre de feux tous les nombres jusqu'à 1000, en convenant que chaque feu de la station de droite valait 1, que chaque feu de la station du milieu valait 10, et que chaque feu de la station de gauche valait 100. Mais ce fait n'entraîne aucune conséquence générale sur la méthode de numération écrite des Romains : dans ce cas particulier, une nécessité absolue les avait forcés de recourir d'une manière exceptionnelle à la valeur de position, pour ne pas multiplier les signaux plus qu'il n'était possible de le faire. Du reste, on ne sait pas de combien de temps cet usage romain est antérieur à la chute de l'empire d'Occident, ni s'il a précédé l'époque du géomètre latin Archytas et l'usage de l'*abacus* décrit par Boèce.

Cet *abacus* lui-même avait été précédé d'un autre *abacus* ou ἄβαξ employé sous ces noms chez les Grecs aussi bien que chez les Romains (178) et connu sous le nom de *suan-pan* chez les Chinois (179). C'était une *machine à compter*, pour faire les calculs usuels sans employer l'écriture; cette machine offrait des cases distinctes pour recevoir les boules représentant les unités de différents ordres et les fractions de ces unités, savoir : chez les Grecs, les *oboles* ou sixièmes de la *drachme*, les tiers, les moitiés de la drachme, les unités simples de drachmes, les dizaines de drachmes, les centaines de drachmes ou *mines*, les milliers de drachmes, et enfin les *talents ;* et chez les Romains, l'*once* ou douzième de l'*as*, les unités, dizaines, centaines, milliers, dizaines de mille, centaines de mille et millions d'as. On pouvait ainsi, sans rien écrire, calculer de très-grands nombres avec un petit nombre de boules, qui avaient une valeur différente suivant la case où on les mettait. Le moine Richer nous a parlé d'un *abacus* de cette espèce fabriqué au X[e] siècle par les soins de Gerbert (180). L'usage de ces machines à compter s'est conservé en Russie et dans quelques parties de la Pologne; depuis quelques années, cette machine a été introduite de nouveau en France, sous le nom de *boullier*, pour l'instruction des petits enfants dans nos salles d'asile (181) : c'est l'imitation d'une machine à compter des

(178) Voyez M. Vincent, *Lettre à M. Letronne sur un abacus athénien* (*Revue archéologique*, III[e] année, p. 401).

(179) Voyez M. de Humboldt, *Ueber die bei verschiedenen Vœlkern üblichen Systeme von Zahlenzeichen* (dans Crelle's *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1829, t. IV, p. 205 et suiv.).

(180) Voyez plus haut, § 5.

(181) Voyez M. Chasles, *Développements et détails historiques sur divers points du système de l'abacus*, § 10, p. 17, note 1.

anciens. Or, il semble qu'il était bien facile aux Grecs et aux Romains d'appliquer la même méthode à la numération écrite, en remplaçant les cases par des colonnes tracées sur le papyrus, sur le parchemin, sur les tablettes, ou bien sur le tableau couvert de poudre, où l'on écrivait les calculs avec le doigt (182), et en remplaçant les boules de chaque case par neuf signes graphiques représentant les nombres de ces boules depuis 1 jusqu'à 9 inclusivement, et d'arriver ainsi précisément à l'*abacus* décrit par Boèce. Nous avons vu que les Romains, dans les derniers temps de leur empire, ont réellement fait cette application. Pour la faire, il suffisait d'en avoir la pensée : chose difficile quelquefois précisément pour les inventions les plus simples. Cette invention une fois faite, il restait à la propager. Pour avoir chance d'y réussir, il fallait s'adresser à des hommes qui en sentissent vivement le besoin à cause des défauts de leurs procédés antérieurs. C'est pourquoi cette invention devait mieux réussir près des Romains que près des Grecs, qui s'en sont tenus à leur numération écrite, plus commode que celle des Romains, jusqu'à l'époque où le système indien avec le zéro et sans colonnes tracées d'avance, c'est-à-dire notre système moderne, leur est venu par les Arabes (183), tandis que les peuples chrétiens de l'Occident arrivèrent d'eux-mêmes à ce système par un perfectionnement du système de l'*abacus*. Mais la propagation générale et vulgaire de ce système au XIII[e] siècle est due en grande partie à l'influence puissante que les études arabes exercèrent à cette époque pour le progrès des sciences chez les nations chrétiennes.

VIII.

Origine indienne du système arabe, antiquité de ce système dans l'Inde, et rapports du système indien avec l'Égypte pour les figures des chiffres seulement.

Mais où les Arabes eux-mêmes avaient-ils pris cette méthode de numération écrite avec valeur de position des neuf chiffres, et avec le *zéro* consistant en un point pour marquer les places vides ? Les Arabes eux-mêmes nous déclarent qu'ils avaient emprunté cette méthode aux Indiens (184). En effet, il est parfaitement certain qu'a-

(182) Voyez M. Chasles, *ibidem*, § 11, p. 18-20.
(183) Voyez plus haut, fin du § 6.
(184) Voyez Montucla, *Histoire des mathématiques*, part. II, liv. I, chap. VIII, t. I, p. 375 et suiv., et M. Reinaud, *Mémoire sur l'Inde antérieurement au XI[e] siècle*

vant d'étudier les sciences mathématiques dans les ouvrages grecs, les Arabes les avaient étudiées d'abord dans des livres indiens (185). De même que tous les peuples sémitiques, les Arabes ont eu un système de numération écrite analogue à celui des Grecs, et les Arabes l'ont même gardé concurremment avec le système indien, qu'ils ont adopté au VIII[e] siècle (186).

(*Institut*, *Académie des inscriptions*, t. XVIII, II[e] partie, p. 298-301). Comp. Bayer, *Historia regni Græcorum bactriani*, § 49, p. 127 et suiv. (Saint-Pétersbourg, 1738, in-4). Ainsi, Maxime Planude, moine grec du XIV[e] siècle, dans son traité intitulé *Calcul suivant les Indiens*, a raison d'attribuer aux Indiens le système arabe. Voyez plus haut, note 159.

(185) Voyez M. Reinaud, *Mémoire sur l'Inde*, etc. (*Institut*, *Acad. des inscr.*, t. XVIII, II[e] partie, p. 205 et suiv.); M. Weber, *Akademische Vorlesungen über die indische Literaturgeschichte*, p. 225 (comp. p. 202 et p. 178), et dans les *Indische Studien*, t. II, p. 260 et 277; Colebrooke, *Miscellaneous essays*, t. II, p. 365, 367, 368, 410-413; Lassen, *Indische Alterthumskunde*, t. II, p. 1130-1131, et mon Mémoire *Sur Héron d'Alexandrie*, etc., p. 164-176, et p. 397-398.

(186) Voyez M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, p. 72-81. Suivant un texte de la *Chronique* de Théophane (dans le *Corpus hist. Byzant.*, p. 314, ed. Paris.; p. 250, ed. Venet.), le sultan Walid I[er], en l'an 706 de notre ère, défendit aux populations grecques soumises à son pouvoir d'écrire dans leur langue les comptes officiels, et ordonna de rédiger ces comptes en arabe. Ce fait s'accorde avec ce que rapporte Aboul-Maharen (cité par M. Quatremère, *Recherches sur la langue de l'Egypte*, p. 32), que l'an 96 de l'hégire (714-715 de notre ère), le gouverneur de l'Égypte ordonna que les registres du divan, qui jusque-là étaient tenus en copte, fussent écrits en arabe. Cependant, suivant Théophane, Walid « excepta les calculs, attendu que dans la langue arabe, dit ce chroniqueur, il est impossible d'écrire *un*, ou *deux*, ou *trois*, ou *huit*, *un demi*, ou *un tiers* » (χωρὶς τῶν ψήφων, ἐπειδὴ ἀδύνατον τῇ ἐκείνων γλώσσῃ μονάδα ἢ δυάδα ἢ τριάδα ἢ ὀκτώ, ἥμισυ ἢ τρία γράφεσθαι. Au lieu des mots ἢ τρία, il me paraît évident qu'il faut lire ἢ τρίτον). Or Théophane, qui s'est mal exprimé, ne peut pas avoir voulu dire que dans la *langue* arabe il n'y avait pas de mots qui pussent être écrits pour signifier ces nombres; mais il a voulu dire sans doute que, dans l'*écriture* arabe, il n'y avait pas de *caractères* destinés à exprimer chacun de ces nombres *par un seul signe*. Ainsi, d'après ce témoignage, s'il était digne de toute confiance, les Arabes, en l'an 706 de notre ère, n'auraient eu ni le système indien de numération écrite, qu'en effet ils n'empruntèrent qu'un peu plus tard, ni même un système analogue à celui des autres peuples sémitiques et des Grecs. Or, ce dernier point me paraît difficile à croire; mais, d'un autre côté, il me paraît difficile de révoquer en doute le fait de la permission accordée par Walid d'employer les caractères grecs pour exprimer les nombres dans des pièces officielles qu'il prescrivait de rédiger en arabe. Or, cette permission paraît supposer que le système de numération écrite des Grecs était reconnu préférable à celui que les Arabes possédaient en 706, avant d'avoir emprunté celui des Indiens : et telle est la conclusion que je crois pouvoir tirer de ce texte du chroniqueur byzantin. C'est à la bienveillance de M. Brunet de Presle que je dois l'indication de ce texte, qui, je crois, n'avait pas encore figuré dans l'histoire de l'arithmétique.

Mais d'où venait aux Indiens eux-mêmes ce système de numération semblable au nôtre? M. Vincent (187) incline à croire qu'ils l'avaient reçu des Grecs par l'intermédiaire surtout des marchands et des médecins juifs. Je ne pense pas que cette supposition puisse être acceptée. En effet, on peut suivre chez les Indiens, en remontant jusqu'au V[e] siècle de notre ère, l'emploi de la notation arithmétique que les Arabes leur ont empruntée au VIII[e] siècle, c'est-à-dire d'une numération écrite avec neuf chiffres, avec la valeur de position dans le système décimal, avec le point jouant le rôle du *zéro* et sans les colonnes de l'*abacus* (188). Or, il est vrai que des emprunts faits par les Indiens aux sciences de la Grèce avant le V[e] siècle de notre ère sont parfaitement constatés (189). Mais les Grecs n'avaient pas un système de numération écrite pareil à celui des Indiens et au nôtre; il est même très-douteux que la méthode de l'*abacus* de Boèce ait été en usage chez les Grecs, ou du moins cette méthode ne fut chez eux que très-peu employée, et une notation arithmétique sans valeur de position est la seule qui se rencontre chez les auteurs grecs jusqu'au XIII[e] siècle (190). Par conséquent, il est impossible que les Indiens doivent aux Grecs leur système de numération écrite semblable au nôtre, et il est extrêmement invraisemblable qu'ils leur aient emprunté la méthode de l'*abacus* de Boèce. Cette dernière supposition, très-difficilement admissible, en nécessiterait d'ailleurs une autre, d'après laquelle, dès avant le V[e] siècle, cette méthode elle-même aurait été transformée par les Indiens en notre système moderne, qu'on trouve dominant chez eux dès cette époque. Il est probable que nous pourrions suivre plus haut encore dans les antiquités de l'Inde l'existence de ce système, si nous avions des arithméticiens indiens d'une époque plus reculée.

Cependant je dois dire que, sur certaines médailles indiennes du IV[e] siècle et des siècles antérieurs, les nombres se trouvent repré-

(187) *Sur l'origine de nos chiffres* (*Notices et extraits des manuscrits*, t. XVI, II[e] partie, p. 150).

(188) Voyez M. de Humboldt, cité dans la note 179, et M. Reinaud, *Mémoire sur l'Inde*, l. c., p. 301.

(189) Voyez Albirouni, traduit par M. Reinaud, *Fragments arabes et persans sur l'Inde*, p. 144 (Paris, 1845, in-8); M. Reinaud, *ibidem*, et *Mémoire sur l'Inde*, etc., (l. c.); M. Chasles, *Recherches sur l'astronomie indienne* (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XXIII, 2 novembre 1846); M. Biot, *Sur les Nakchatras* (*Journal des savants*, janvier 1845); M. Sédillot, *Matériaux pour servir à l'histoire des sciences*, etc., p. 430-455, et *Histoire des Arabes*, p. 358; Colebrooke, *Miscellaneous essays*, t. II, p. 427 et suiv., p. 467 et suiv., p. 504, 508 et 509, etc.

(190) Voyez plus haut, fin du § 6 et § 7.

sentés par des signes tirés des consonnes de l'alphabet sanscrit, sans valeur de position (191). Mais de même, dans les ouvrages d'Aryabhatta, mathématicien indien de la fin du Ve siècle, les nombres sont représentés par des combinaisons de lettres où les voyelles jouent le rôle de multiplicateurs sans valeur de position (192), tandis que dans le *Sourya-siddhanta*, poëme astronomique sanscrit du Ve siècle, les nombres sont exprimés mnémoniquement par des vers techniques où les syllabes représentent les chiffres avec valeur de position. Cependant Aryabhatta a commenté le *Sourya-siddhanta* (194). Ces deux modes de numération écrite coexistaient donc au Ve siècle dans l'Inde, et par conséquent ils ont pu y coexister aussi pendant les siècles précédents. Mais il est certain qu'après le Ve siècle le système pareil au nôtre fut généralement employé dans l'Inde pour les calculs arithmétiques (195), tandis que ce même système ne se montre que sept ou huit siècles après chez les Grecs, de même que chez les peuples d'origine latine, qui antérieurement n'avaient que la vieille notation romaine et la méthode de l'*abacus*, forme imparfaite de la numératien écrite avec valeur de position. Il est donc vraisemblable que les Indiens, très-éloignés sans doute de la méthode des sciences inductives, mais habiles calculateurs et très-adonnés aux spéculations sur les nombres (196), ont possédé de très-bonne heure et ont trouvé eux-mêmes le système que les Arabes leur ont emprunté. En effet, l'invention de ce

(191) Voyez M. Lassen, *Indische Alterthumskunde*, t. II, p. 1139-1140.

(192) Voyez M. Lassen, *ibidem*, p. 1138-1141.

(193) Voyez M. l'abbé Guérin, *Astronomie indienne*, chap. XII, p. 138-140 (Paris, 1847, in-8). Comp. *ibidem*, chap. II et chap. XI.

(194) Voyez Wilson (*Mackensie collection*, t. I, p. 1109, n° 5), cité par M. Lassen, *Indische Alterthumskunde*, t. II, p. 1137. Le *Sourya-siddhanta*, d'après des considérations astronomiques que je développerai ailleurs, ne peut pas être antérieur au Ve siècle. Aryabhatta est cité par des auteurs du commencement du VIe siècle, et il a commenté le *Sourya-siddhanta*. Le poëme et le commentateur sont donc du Ve siècle.

(195) Voyez M. Reinaud, *Mémoire sur l'Inde*, etc., (*Institut*, *Acad. des inscr.*, t. XVIII, IIe partie, p. 301). Dans leur système de numération, les Indiens emploient pour les calculs neuf chiffres analogues aux chiffres arabes et le point servant de *zéro*. Dans les traités scientifiques en langue sanscrite, même postérieurs au Ve siècle, on trouve des vers techniques destinés à rappeler les résultats des calculs : les chiffres y sont remplacés soit par certaines syllabes, soit par les noms de certains objets, dont les figures tenaient aussi lieu de chiffres. Ces figures hiéroglyphiques, ces noms et ces syllabes représentant les chiffres, ont leur valeur de position, comme les chiffres eux-mêmes, en commençant par les unités de l'ordre le moins élevé. Voyez M. l'abbé Guérin, *Astronomie indienne*, chap. XII.

(196) Voyez M. Bohlen, *Das alte Indien*, t. II, p. 298.

système, ne supposant que des notions élémentaires d'arithmétique, a pu être le produit d'une conception très-heureuse sans doute, mais extrêmement simple, et par conséquent cette invention a pu être contemporaine de l'enfance des sciences mathématiques. M. de Humboldt remarque cependant que cette invention est postérieure à la séparation de la race hindoue et de la race ariane, puisqu'on ne la trouve pas chez le peuple zend; il remarque aussi que, dans l'Inde même, le système de numération écrite caractérisé par la valeur de position et par l'emploi du *zéro* est étranger aux signes numériques tamouls et cingalais (197).

On n'a découvert aucune trace de ce système dans les monuments de l'Égypte pharaonique, qui pourtant employait des chiffres analogues aux nôtres et aux *apices* de l'*abacus* de Boèce, mais sans valeur de position. Je ne pense pas qu'on ait découvert non plus aucune trace de ce même système et de la valeur de position dans les monuments antiques de la Phénicie et de l'Assyrie. Les Chinois ont emprunté ce système aux Indiens, mais après le Ve siècle (198). Chez les Juifs, M. Nesselmann (199) en signale un exemple, mais unique et imparfait : il le trouve dans l'indication du nombre des versets du *Pentateuque* en tête de la *Massore* (200); ce nombre, 5845, y est, dit-il, écrit *de droite à gauche*, comme lisent les Hébreux, par les lettres qui signifient 5, 8, 40 et 5. Ainsi, de ces quatre lettres prises comme chiffres, la troisième est la seule qu'il faudrait changer pour que le nombre fût écrit tout entier d'après notre système moderne, si ce n'est que, lisant *de gauche à droite*, nous placerions dans l'ordre inverse les chiffres correspondants. Mais je dois faire observer que dans la notation hébraïque, où les lettres de l'alphabet fournissent neuf signes pour les neuf premiers nombres, puis neuf autres signes pour les dizaines, puis neuf autres signes encore pour les centaines, on reprenait pour les mille, pour les dizaines de mille et pour les centaines de mille les mêmes lettres surmontées de deux points, et que ces deux points se supprimaient souvent, quand il n'en pouvait résulter aucune amphibologie, c'est-à-dire quand les ordres in-

(197) Voyez M. de Humboldt, *Cosmos*, t. II, IIe partie, chap. v, note 19, p. 543 de la traduction française; le même, *Ueber die bei verschiedenen Vœlkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen* (dans Crelle's *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1826, t. IV, p. 205 et suiv.), et *Examen critique de l'histoire de la géographie du nouveau continent*, t. IV, p. 275.

(198) Voyez M. Reinaud, *Mémoire sur l'Inde*, etc., l. c., p. 301.

(199) *Die Algebra der Griechen*, *Zusætze*, p. 494.

(200) Le texte de la *Massore* a été publié par Daniel Bomberg (Venise, 1525).

férieurs d'unités ne manquaient pas dans le nombre donné (201). Il n'est donc pas surprenant que les 5000 du nombre 5845 soient exprimés simplement à droite par la lettre qui signifie 5. Ensuite les 4 dizaines et les 5 unités sont exprimées à la manière grecque par les lettres hébraïques qui signifient 40 et 5. La valeur de position ne se montrerait donc ici d'une manière caractéristique que dans la lettre qui signifie habituellement 8, et qui serait employée ici pour signifier 800. Mais cette lettre ne diffère pas beaucoup de celle qui signifie 800, et il pourrait y avoir là une simple faute de copie, sinon même une simple faute d'impression dans l'édition du texte de la *Massore*. D'ailleurs, dans ce même nombre, les 4 dizaines sont exprimées sans valeur de position ; l'exemple serait donc imparfait. Enfin cet exemple isolé et tout à fait exceptionnel serait seulement du commencement du VIe siècle, époque de la rédaction définitive de la *Massore*. Cet exemple unique ne prouverait donc rien en faveur de l'antiquité de ce système chez les Juifs, qui, du moins habituellement, n'ont fait aucun usage de la valeur de position des chiffres avant l'époque de l'influence arabe (202). Ainsi, la priorité reste aux Indiens, qui sont probablement les premiers inventeurs de cette méthode de numération écrite.

Quant aux figures des neuf chiffres, elles se présentent chez les anciens Égyptiens, chez les Indiens, chez les Arabes, dans les plus anciens manuscrits de Boèce, dans les manuscrits des traités latins écrits au moyen âge sur l'*abacus* et sur l'*algorisme*, et dans notre numération moderne, avec une ressemblance qui est assez grande pour ne pouvoir pas être attribuée au hasard (203). Nous avons vu que nos chiffres viennent des *apices* de Boèce, et que ceux-ci, avec leurs noms bizarres, les uns grecs, les autres hébraïques, et avec leurs formes symboliques, sont venus de l'Égypte à une époque où les influences grecques, juives et gnostiques y étaient combinées

(201) Voyez Pierre Guarin, *Grammatica hebraica et chaldaica*, lib. III, c. III, art. 1, t. II, p. 376-378 (Paris, 1726, in-4). L'emploi hébraïque de ces deux points a été imité par quelques Grecs au moyen âge. Voyez Montfaucon, *Palæographia græca*, *Recens.*, p. XII-XIII. Comp. M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, p. 81-83.

(202) Voyez M. Nesselmann, l. c., p. 72 et suiv.

(203) Voyez et comparez les figures des chiffres indiens et arabes et des chiffres arabes de Planude, chez Bayer (*Historia regni græcorum bactriani*, tab. I, fig. 2) et chez Montucla (*Histoire des mathématiques*, t. I, planche 11); les figures des chiffres hiératiques égyptiens chez Champollion (cité dans la note 140), et les figures des chiffres de Boèce et des traités de l'*abacus*, chez M. Chasles (cité dans la note 141).

sous la domination romaine (204). Quant aux chiffres arabes, ils viennent des chiffres indiens. Mais les chiffres indiens eux-mêmes et ceux des Arabes offrent une ressemblance qui ne peut être méconnue, d'une part avec les chiffres égyptiens de la vieille écriture hiératique du temps des Pharaons, d'autre part avec les *apices* de Boèce. L'intention symbolique, moitié pythagoricienne, moitié gnostique, qui a été parfaitement dévoilée par M. Vincent dans les figures des *apices* et dans les noms de plusieurs d'entre eux (205), ne se montre bien clairement que dans une des figures des chiffres hiératiques égyptiens, et ne se laisse pas du tout apercevoir dans les figures des chiffres indiens. La secte alexandrine à laquelle appartient la méthode de l'*abacus* a donc modifié à dessein et d'après des idées préconçues les figures des chiffres égyptiens en se les appropriant.

Mais comment expliquer ce qu'il y a de commun, pour les figures des chiffres, entre les anciens Égyptiens et les Indiens? C'est là une question qu'il est bien difficile de résoudre, et sur laquelle on peut tout au plus hasarder quelques conjectures, comme je vais le faire ici. De très-bonne heure l'antique Égypte eut avec l'Inde au moins des relations indirectes par l'intermédiaire des Phéniciens, des Sabéens et des colonies indiennes des côtes de l'Arabie (206); elle eut avec l'Inde des relations directes sous les Ptolémées (207) et plus encore sous les empereurs romains (208). Il n'est donc pas impossible que, pour les figures des chiffres, les Indiens aient imité

(204) Voyez plus haut, § 6.

(205) Voyez M. Vincent (cité dans la note 137).

(206) Voyez le *Périple de la mer Érythrée*, p. 156 et 159 de Blancanus; Lassen, *Indische Alterthumskunde*, t. II, p. 580-582, et Bohlen, *Das alte Indien*, t. II, p. 131-141. Comp. Gardner Wilkinson, *Manners and customs of the ancient Egyptians*, 3ᵉ éd., t. I, p. 226, 231, etc., t. III, p. 106-108 et p. 217, et Lassen, *Indische Alterthumskunde*, t. II, p. 595-597. Sur la navigation des Indiens, très-florissante à une époque reculée, voyez Lassen, *ibidem*, t. I, p. 748, et t. II, p. 578-582 et p. 620.

(207) Voyez Strabon, II, p. 118 A, et XV, p. 686 B de Casaubon.

(208) Voyez *le Périple de la mer Érythrée*, notamment p. 174 de Blancanus; Pline, *Hist. nat.*, VI, 23 (26), t. I, p. 439-441 de Sillig, et Ammien Marcellin, XXII, 7. Comp. M. Reinaud, *Relation des voyages faits par les Arabes dans l'Inde*, etc., t. I, Introd., p. XXVIII et suiv.; Bohlen, *Das alte Indien*, t. II, p. 134-135, et M. Lassen, *Indische Alterthumskunde*, t. II, p. 343 et p. 589. Il y avait dans l'île de Dioscoride (Socotora) des Égyptiens, des Grecs et des Indiens. Voyez *le Périple de la mer Érythrée*, p. 159 de Blancanus, et Cosmas Indico-pleustès, p. 178. Comp. M. Reinaud, l. c., et M. Letronne (*Institut*, *Académie des inscriptions*, t. IX, p. 173). Non-seulement des commerçants indiens, mais des brahmanes, visitaient alors l'Égypte. Voyez Damascius, *Vie d'Isidore*, dans la *Bibliothèque* de Photius, p. 340 de Bekker.

les Égyptiens, ou les Égyptiens aient imité les Indiens. Cependant j'incline à croire que ces figures, sous leur forme primitive, diversement altérée depuis, appartenaient à la race chamite, dont les Égyptiens furent le rameau le plus civilisé et le plus persistant, mais dont diverses branches paraissent avoir occupé, dans les temps les plus reculés, toutes les côtes méridionales de l'Asie depuis l'Arabie jusqu'à l'Inde (209). Les Égyptiens ou Misraïtes sont probablement venus de l'Asie par le midi de l'Arabie, le golfe Arabique et la haute Égypte, à une époque où la race de Cham, n'ayant pas l'écriture phonographique ou alphabétique, dont l'invention paraît due surtout à la race de Sem, ne connaissait encore que l'écriture idéographique, à laquelle les neuf chiffres appartiennent, et qui s'est perfectionnée sur le sol de l'Égypte, en s'adjoignant des signes phonétiques. Les Indiens des temps historiques, c'est-à-dire les Indiens Aryas venus de l'Iran, semblent avoir fait beaucoup d'emprunts aux races auxquelles ils vinrent se superposer en prenant possession du sol indien (210) : parmi ces emprunts, il faut peut-être compter celui des figures des neuf chiffres et celui des représentations hiéroglyphiques par lesquelles les Indiens les remplaçaient quelquefois (211).

Quoi qu'il en soit de ces conjectures, ce qu'il faut bien remarquer, c'est qu'il n'y a aucune liaison nécessaire entre notre système de numération écrite avec valeur de position et ces neuf signes numériques. En effet, c'était sans valeur de position que les Égyptiens les employaient, et ils avaient des signes particuliers pour les différents nombres de dizaines; ajoutons que, dans la désignation des jours de la lunaison ou des jours du mois solaire, ils exprimaient chacun des nombres ordinaux 5e, 6e, 7e et 8e, par la juxtaposition de deux chiffres désignant les quatre premiers nombres ordinaux (212).

Ce n'est donc pas en Égypte, mais dans l'Inde, qu'il faut chercher les plus anciens exemples de notre méthode actuelle de numération écrite. La méthode de l'*abacus*, moins parfaite que la mé-

(209) Voyez la *Genèse*, X, 6-20. Comp. M. Lenormant, *Cours d'histoire ancienne*, chap. VI (Paris, 1838, in-8); M. d'Eckstein, *Du naturalisme dans les hymnes du Véda* (*Athenæum français*, IVe année, p. 63, col. 2); *les Éthiopiens de l'Asie* (*ibidem*, IIIe année, p. 364-368), et *Questions relatives aux antiquités des peuples sémitiques*, §§ 4, 5 et 7 (*Revue archéologique*, XIIe année, p. 578-580, 583, 586 et 588), et M. Renan, *Histoire générale des langues sémitiques*, liv. I, chap. II, §§ 1 et 3, p. 32-33 et p. 53-54.

(210) Voyez M. Weber, *Akademische Vorlesungen über die indische Literaturgeschichte*, p. 145-148.

(211) Voyez la note 195.

(212) Voyez Champollion cité dans la note 140.

thode indienne, est une invention gréco-romaine, qui, venue d'Alexandrie, s'est perpétuée au moyen âge dans l'Europe occidentale, où elle a fini, en se perfectionnant, par se fondre avec la méthode indienne importée par les Arabes (213).

H. MARTIN.

Doyen de la Faculté des lettres de Rennes, correspondant de l'Institut.

(213) Voyez plus haut, § 6.

Ch. Lahure, imprimeur du Sénat et de la Cour de cassation,
rue de Vaugirard, 9, près de l'Odéon.

LE NOMBRE NUPTIAL

ET

LE NOMBRE PARFAIT DE PLATON.

EXPLICATION D'UNE ÉNIGME MATHÉMATIQUE

QUI SE TROUVE AU COMMENCEMENT DU VIII[e] LIVRE DE LA RÉPUBLIQUE.

---

§ I.

Après avoir exposé l'organisation de sa cité idéale, et spécialement les règlements étranges qui concernent la famille, Platon, au commencement du VIII[e] livre de la *République*, prétend indiquer les causes qui produisent les révolutions des États, causes fatales qui, de son propre aveu, finiraient nécessairement par détruire même la constitution, réputée par lui si parfaite et si solide, dont il vient de tracer le plan. Cette altération commencerait, suivant lui, par l'oubli des lois mystérieuses qui doivent régler les mariages et la procréation des enfants. Ici, après avoir invoqué les Muses, et s'inspirant des conceptions de l'école pythagoricienne, Platon dit quels sont les nombres sacrés d'où dépend, suivant lui, cette partie fondamentale de l'ordre social; mais, d'après la tradition de cette école, un si profond mystère ne devait être présenté que sous un voile impénétrable pour les profanes. Voilà pourquoi, dans ce passage, Platon, sous le personnage de Socrate, ne fait que proposer une énigme mathématique qu'il a voulu rendre très-difficile à deviner, et il faut avouer qu'en cela il a parfaitement réussi; car, dès l'antiquité, *l'obscurité du nombre de Platon* était passée en proverbe(1). Quelques commentateurs modernes sont allés jusqu'à douter que cette énigme eût une solution, et jusqu'à supposer que Platon

(1) Voy. Cicéron, *Epistolæ ad Atticum*, VII, 13. Comparez Marsiglio Ficino. Argument du VIII[e] livre de la *République*, p. 150 de sa traduction latine de Platon, édition de Josse Badius d'Assche (Paris, 533, in-fol.).

avait voulu tout simplement se jouer de ses lecteurs. Que Platon n'ait pas eu une foi bien profonde dans l'influence politique des nombres qu'il avait en vue, je suis assez disposé à le croire (2); mais, qu'il n'ait eu en vue aucun nombre déterminé, et qu'il ait voulu faire des phrases dépourvues de sens, c'est ce qu'il me paraît impossible d'admettre. D'ailleurs, Aristote, Aristide Quintilien, Plutarque, l'auteur de la *Théologie arithmétique* anonyme et Proclus attachaient sans doute un sens précis à ce passage, puisqu'ils ont saisi l'occa•ion d'en expliquer quelques parties (3).

Pour nous, la difficulté est compliquée, comme nous le verrons, par une petite faute que les copistes ont commise en transcrivant ce texte, qu'ils ne comprenaient pas. Deux savants allemands, Fries et Schneider, ont échoué dans l'interprétation de ce passage; pourtant ils ont ouvert la voie et commencé à éclaircir quelques points du problème. Schleiermacher, qui les réfute, avoue lui-même qu'il n'a bien compris qu'une partie de ce passage, à cause duquel, dans l'espoir d'un meilleur succès, il avait interrompu pendant douze ans la publication de sa traduction allemande de Platon; et M. Cousin, à son tour, avoue que ses efforts n'ont pas été plus heureux sur ce problème plus mathématique que philosophique. Enfin un mathématicien helléniste, M. Vincent, me paraît avoir le premier trouvé une solution complète et satisfaisante, du moins dans l'ensemble, sinon dans tous les détails. Il y est parvenu principalement en fixant le sens de plusieurs locutions obscures, qui étaient comme le pivot de la difficulté, telles que ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγείς, puis διάμετρος employé arithmétiquement, puis ἕκτον à mettre à la place de ἑκατόν, et en même temps en distinguant bien les deux parties de l'énigme et en marquant bien la transition de la première partie à la seconde, à laquelle elle prête ses résultats. Mais il me semble que divers points de l'explication philologique laissaient encore à désirer: pour la compléter et la rectifier, j'ai eu le bonheur de réunir quelques textes anciens que mon savant devancier n'avait pas eus sous les yeux; marchant ainsi sur ses traces avec des secours qui lui ont manqué, je crois avoir apporté à la solution qu'il a trouvée quelques amendements et une confirmation utile. Ensuite, pour l'interprétation philosophique de cette solution et pour la recherche des conséquences historiques qui peuvent s'en déduire, les principaux développements m'appartiennent. En outre,

(2) Voy. plus loin, § 6.

(3) Leurs explications partielles sont citées plus loin, §§ 3 et 5.

j'ai trouvé chez un auteur ancien l'explication très-probable d'un nombre auquel Platon s'est contenté ici de faire allusion, et qui ne se rattache qu'indirectement à son énigme, savoir, du *nombre parfait*, qui, suivant lui, préside aux révolutions célestes: cette explication confirme celle qui concerne le *nombre nuptial*, objet spécial de l'énigme de Platon, et ces deux explications me conduisent à montrer l'importance de ce passage du VIII[e] livre de la *République* pour l'histoire des mathématiques avant l'école d'Alexandrie, tant chez les Grecs que chez les Égyptiens et les peuples de l'Asie.

Je termine ce préambule en renvoyant le lecteur aux deux éditions successives du remarquable travail de M. Vincent sur le problème difficile que j'ose aborder après lui (4). Ce renvoi me dispensera de signaler en détail ce que je lui emprunte et les points où je m'écarte de lui.

§ II.

Je commence par reproduire ici fidèlement le texte grec de ce passage, d'après l'édition in-4 publiée en 1839 par MM. Baiter, Orelli et Winckelmann (5), qui n'ont fait ici que suivre scrupuleusement l'autorité des manuscrits. Seulement j'ai indiqué entre crochets mes corrections, qui consistent en deux virgules ajoutées et dans la substitution du caractère ϛ ou du mot ἕκτου au mot ἑκατόν. En regard du texte, je donne ma traduction littérale, qui sera justifiée par la suite de cette dissertation. Je justifierai également le texte que j'ai suivi.

VIII[e] livre de la République de Platon, p. 546 B C.

Ἔστι δὲ θείῳ μὲν γεννητῷ περίοδος, ἣν ἀριθμὸς περιλαμϐάνει τέλειος, ἀνθρωπείῳ δὲ ἐν ᾧ πρώτῳ αὐξήσεις δυνάμεναί τε καὶ δυναστευόμεναι[,] τρεῖς ἀποστάσεις, τέτταρας δὲ ὅρους λαϐοῦσαι ὁμοιούντων τε καὶ ἀνο-	Il y a, pour ce qui est divin et engendré, une période qu'un nombre parfait embrasse; mais, pour les générations humaines, il y a un nombre qui est le premier dans lequel des puissances commandantes et commandées, recevant trois intervalles et quatre termes, de ceux qui rendent semblable et

(4) *Sur le nombre de Platon*. Paris, 1839, in-8 (extrait du journal l'*Institut*, II[e] section, *Sciences historiques*, *archéologiques et philosophiques*, n° 45, septembre 1839), et surtout *Notice sur divers manuscrits grecs relatifs à la musique*, Supplément à la note L, *Sur le nombre nuptial de Platon* (*Notices et extraits des manuscrits*, etc., t. XVI, II[e] partie, p. 184-194).

(5) P. 509. Zurich, 1839, in-4.

μοιούντων καὶ αὐξόντων καὶ φθινόντων, πάντα προσήγορα καὶ ῥητὰ πρὸς ἄλληλα ἀπέφηναν· ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται τρὶς αὐξηθείς, τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις, ἑκατὸν τοσαυτάκις, τὴν δὲ ἰσομήκη μέν, τῇ προμήκει δέ, ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀῤῥήτων δέ[,] δυεῖν, ἑκατὸν [au lieu de ἑκατόν, lisez ϛ, ou peut-être ἕκτου] δὲ κύϐων τριάδος· ξύμπας δὲ οὗτος ἀριθμὸς γεωμετρικός, τοιούτου κύριος, ἀμεινόνων τε καὶ χειρόνων γενέσεων.....

de ceux qui rendent dissemblable, de ceux qui croissent et de ceux qui décroissent, ne présentent que des choses en proportion et rationnelles les unes par rapport aux autres; et de cela le rapport *épitrite* réduit à ses termes les plus simples et joint au quinaire, [le tout] étant élevé à la troisième puissance, donne deux *harmonies*, l'une multipliée par elle-même et l'autre multipliée par cent; l'une carrée et égale suivant une dimension à l'autre, qui est allongée, [la somme étant] de cent nombres formés avec les diagonales rationnelles du quinaire, dont chacune manque d'une unité et qui sont irrationnelles, de deux et d'un *sixain* de cubes du ternaire. Or ce nombre tout entier est un nombre géométrique, qui a ce pouvoir, de déterminer des générations meilleures ou pires.....

§ III.

Expliquons maintenant le sens littéral du texte et de la traduction.

Ce qui est *divin et engendré*, ce sont les astres, suivant la doctrine de Platon (6). Les révolutions des astres sont *embrassées* par un *nombre parfait*, que Platon ne définit pas ici, mais sur lequel nous reviendrons cependant plus loin.

Les générations humaines sont réglées, suivant Platon, par un nombre moins parfait et qu'il définit en termes énigmatiques. Je vais montrer que Platon, comme M. Vincent l'a bien compris, a entendu former ce nombre d'après le tableau suivant :

1 :	1 :	1 :	1
1 :	2 :	4 :	8
1 :	3 :	9 :	27
1 :	6 :	36 :	216

(6) Voy. le *Timée*, p. 28 B, C, p. 36 D, E, p. 37 A, C, p. 38 C, p. 40 B, p. 41 A, B, etc.

En effet, dans ce tableau, chaque ligne horizontale présente une progression géométrique de *quatre termes*, entre lesquels il y a, par conséquent, *trois intervalles*. Chaque colonne verticale comprend de même *quatre termes* et *trois intervalles*. Dans chaque ligne horizontale, l'unité est suivie de trois *puissances* d'un même nombre : ces puissances sont les unes *commandantes* et les autres *commandées*, ou, en d'autres termes, le dernier nombre, non-seulement de chaque colonne horizontale, mais aussi de chaque colonne verticale, *commande* géométriquement les trois précédents, c'est-à-dire qu'il est égal à leur produit. En effet, $1 \times 1 \times 1 = 1$; $1 \times 2 \times 3 = 6$; $1 \times 4 \times 9 = 36$; $1 \times 8 \times 27 = 216$. Cette expression, *puissances commandantes et commandées*, était en usage chez les pythagoriciens ; car Alexandre d'Aphrodisie (7) nous apprend que l'hypoténuse était appelée par eux *commandante* (δυναμένη) et les deux côtés de l'angle droit *commandés* (δυναστευόμεναι), parce que la seconde puissance de l'hypoténuse vaut la somme des secondes puissances de ces deux côtés : seulement le carré de l'hypoténuse *commande arithmétiquement* les carrés des deux côtés, dont il est la *somme*, tandis que les puissances de 6 dans le tableau ci-dessus *commandent géométriquement* les puissances de 1, de 2 et de 3, dont elles sont le *produit*.

Parmi les seize termes du tableau, sept sont *de ceux qui rendent semblable*, c'est-à-dire qu'ils sont égaux à l'unité, et neuf sont *de ceux qui rendent dissemblable*, c'est-à-dire qu'ils diffèrent de l'unité. En effet, Nicomaque (8), Théon de Smyrne (9) et l'auteur de la *Théologie arithmétique* (10) remarquent que l'unité seule a la propriété de maintenir semblables à eux-mêmes et de confirmer dans leur identité les nombres qu'elle multiplie, tandis que tous les nombres autres que l'unité produisent un changement par la multiplication. Nous avons trouvé tout à l'heure, parmi les *puissances commandées*, des facteurs égaux à l'unité : c'est à ces facteurs conservateurs de l'identité que Platon fait ici allusion, en les opposant aux facteurs qui produisent des changements.

Les termes du tableau *vont en croissant* de gauche à droite dans les lignes horizontales et de haut en bas dans les lignes verticales ;

(7) *Sur la Métaphysique*, I, 8, p. 56, éd. de M. Bonitz (Berlin, 1847, in-8), ou bien dans le t. IV, p. 561, des Œuvres d'Aristote, édition de Berlin. Proclus (*sur le premier livre d'Euclide*, p. 2, l. 14 en remontant, éd. grecque de Bâle) cite aussi ces expressions, en renvoyant au texte de la *République*, mais sans les expliquer.

(8) *Arithmétique*, II, 7, p. 130-131 d'Ast (p. 57 de Wechel).

(9) *Arithmétique*, c. 3, p. 25 de Boulliau.

(10) C. 1, p. 3 d'Ast (p. 5 de Wechel).

monie seule, qui ainsi serait multipliée d'abord par elle-même et ensuite par 100; et les mots τὴν δὲ ἰσομήκη μὲν τῇ, προμήκη δὲ s'appliqueraient à la seconde *harmonie* seule, qui ainsi serait de même longueur que la première, mais avec une largeur différente, que rien dans la phrase ne ferait connaître. Or cette phrase ainsi altérée ne peut s'accorder ni avec ce qui précède, ni avec ce qui suit; car le carré de la première *harmonie* multiplié par 100 donnerait déjà un nombre beaucoup trop fort, 6400. M. Schneider a oublié qu'avant de changer un texte contre l'autorité de la très-grande majorité des manuscrits, il faudrait d'abord être bien sûr de comprendre la pensée de l'auteur. D'un autre côté, M. Vincent lit par correction τὴν προμήκη δέ. Alors le sens est clair et vrai; car l'*harmonie* multipliée par elle-même est *carrée* (ἰσομήκης), et l'*harmonie* multipliée par 100 est *allongée* (προμήκης). Mais je crois que Platon a voulu être obscur, et que les copistes n'auraient pas introduit la leçon obscure τῇ προμήκει δέ, au lieu de la leçon plus claire τὴν προμήκη δέ, si cette dernière avait été donnée par l'auteur.

Après les mots que nous venons d'expliquer, la phrase se termine par des génitifs, souvent employés ainsi dans les évaluations et qui expriment ici une nouvelle décomposition du total trouvé, c'est-à-dire de 864. D'après cette fin de la phrase, ce total est *de cent nombres formés des diagonales rationnelles du quinaire, de deux et d'un sixain de cubes du ternaire.* Ce que Platon appelle ici *diagonale rationnelle du quinaire*, c'est, comme M. Vincent l'a très-bien expliqué, la partie entière et rationnelle de la diagonale du carré dont le côté est 5, ou de l'hypoténuse du triangle rectangle isoscèle qui est la moitié de ce carré. Platon ajoute que ces *diagonales rationnelles*, c'est-à-dire ces parties rationnelles des diagonales, *manquent chacune d'une unité.* S'il avait voulu être clair, il aurait ajouté au moins le mot δυνάμει, pour signifier qu'*à la seconde puissance* elles manquent chacune d'une unité pour égaler le carré de la diagonale vraie. Enfin il ajoute qu'elles sont *irrationnelles :* c'est aux diagonales vraies que s'applique cette remarque parfaitement juste, mais contradictoire à dessein et seulement en apparence avec ce qui précède. En effet, dans le carré dont le côté est 5, la diagonale est $5\sqrt{2}$, quantité irrationnelle, et le carré de cette diagonale est $5^2 \times 2 = 50$. La partie rationnelle et entière de la diagonale est 7, dont le carré 49 est trop petit d'une unité; car $49 = 50 - 1$. Platon a donc voulu désigner le nombre 7, qui, pris 100 fois, donne 700. Il prescrit d'y ajouter le nombre 2, plus 6 fois le cube de 3, c'est-à-dire 162. En effet, $700 + 2 + 162 = 864$.

Je ne pense pas que cette dernière décomposition du nombre 864 soit, comme M. Vincent le soupçonne, une glose explicative ajoutée par un scoliaste. Car cette *explication* prétendue présenterait bien des *obscurités préméditées* et des expressions évidemment énigmatiques, par exemple, les mots ἀῤῥήτων δέ, de quelque manière qu'on veuille les entendre. D'ailleurs, il faut remarquer que Platon traite le nombre 864 exactement comme il avait traité le nombre 216 : il désigne le nombre 864 par trois égalités : $216 \times \frac{3+4+5}{3} = 864$; $8^2 + 8 \times 100 = 864$; $7 \times 100 + 2 + 3^3 \times 6 = 864$. De même, le quart de 864, c'est-à-dire 216, avait été désigné précédemment par trois égalités : $6^3 = 216$; $1^3 \times 2^3 \times 3^3 = 216$; $3^3 + 4^3 + 5^3 = 216$. Cette triple indication de chacun de ces deux nombres exclut toute espèce de doute sur l'intention que Platon avait de les indiquer, et je crois avoir expliqué d'une manière satisfaisante toutes les obscurités préméditées des expressions qui les concernent dans tout le texte tel que je l'ai donné et traduit ci-dessus.

§ IV.

Ce texte est d'ailleurs conforme à celui des meilleures éditions et des manuscrits, sauf une seule correction, que je vais justifier. Je dis : *une seule* ; car je ne compte pas comme des corrections faites contre l'autorité des manuscrits deux virgules ajoutées, puisque, comme on sait, les manuscrits ne font pas foi pour la ponctuation. Cependant je vais montrer aussi que j'ai bien fait d'ajouter ces deux virgules. La première, qui n'est pas indispensable, a été mise par moi après le participe δυναστευόμεναι, pour montrer mieux qu'il se rapporte au mot αὐξήσεις, et non au mot ἀποστάσεις, qui est à l'accusatif comme complément de λαβοῦσαι. En effet, j'ai montré que, dans le tableau indiqué par Platon, ce sont les *puissances* qui sont *commandantes et commandées*, et qu'elles *reçoivent quatre termes et trois intervalles*. La seconde virgule a été mise par moi après ἀῤῥήτων δέ, pour montrer que cette épithète se rapporte aux *diagonales* (διαμέτρων), qui sont *irrationnelles*, et non au nombre 2 (δυεῖν), à qui cette épithète ne peut pas convenir. En effet, nous avons vu que le nombre 2 (δυεῖν) est pris ici comme nombre abstrait et ne se rapporte pas aux diagonales, et ce nombre n'est pas irrationnel.

Quant aux mots ἑκατὸν δὲ κύβων τριάδος, il était impossible de les conserver sans changement; car ils donneraient le nombre 2700, qui, ajouté à 700 et à 2, donnerait le nombre 3402, au lieu de 864. Or j'ai démontré qu'il s'agit bien certainement du nombre 864, dé-

terminé par deux autres égalités, et le nombre 3402 n'a rien à faire ici. La faute est dans le mot ἑκατόν, à la place duquel il faut certainement lire un mot signifiant 6. Pour expliquer cette altération du texte, plusieurs explications se présentent. La plus simple est celle-ci, qui vient de m'être indiquée par M. Vincent : le texte primitif était peut-être ϛ δὲ κύβων, le ϛ mal fait aura pu être pris pour un ρ dans un manuscrit très-ancien, et cette faute, adoptée par des platoniciens anciens qui avaient perdu le sens de ce passage, aura été reproduite dans tous les manuscrits qui nous restent. Ou bien un copiste très-ancien aura écrit ϛ δὲ κύβον; par suite de cette faute on aura cru que ϛ était un nombre ordinal et on aura lu ἕκτον δὲ κύβον, puis ἕκτον aura été changé en ἑκατόν, et κύβων aura repris ses droits. Ou bien Platon lui-même, voulant être obscur, aura écrit ἕκτου δὲ κύβου, poétiquement pour κύβων δὲ ἕξ ; mais les copistes, ne comprenant pas cette locution poétique, auront écrit, par une correction malheureuse, ἑκατὸν δὲ κύβων. Ou bien enfin Platon avait peut-être écrit ἕκτου δὲ κύβων, en employant ἕκτου pour ἑξάδος. Cette supposition ingénieuse, due à M. Vincent, qui avait hésité à la soutenir contre l'autorité de M. Letronne, ne me paraît pas inadmissible, vu le caractère tout spécial de ce passage énigmatique. Je dis qu'il n'est pas impossible que ce mot ἕκτου ait été employé ici par Platon comme synonyme de ἑξάδος. En effet, dans la partie arithmétique d'un ouvrage *Sur les notions mathématiques utiles pour la lecture de Platon* (16), le platonicien Théon de Smyrne, examinant successivement les propriétés des dix premiers nombres (17), donne constamment à ceux qui précèdent 6 les noms féminins μονάς, δυάς, τριάς, τετράς, πεντάς, et à ceux qui suivent 6 les noms féminins ἑβδομάς, ὀγδοάς, ἐννεάς, δεκάς; mais, quant au nombre 6, il le nomme ἕκτος, au lieu de le nommer ἑξάς, et tous les mots qui s'y rapportent dans la phrase et dans tout le chapitre, étant au masculin, prouvent bien que c'est ἕκτος qu'il faut lire. On objecte que Théon de Smyrne, passant en revue et par ordre les dix premiers nombres, a bien pu désigner *le sixième*, c'est-à-dire le nombre 6, par l'adjectif ordinal ὁ ἕκτος, en sous-entendant ἀριθμός, tandis que Platon n'a pas pu dire ici *le*

(16) Voy. ma dissertation latine en tête de mon édition de la partie astronomique de ce même ouvrage de Théon de Smyrne : *Theonis Smyrnæi....... liber de astronomia*, p. 12-17 (Paris, 1849, in-8). J'y démontre que la partie publiée par Boulliau est un traité d'arithmétique en quatre-vingt-treize chapitres, et non un traité d'arithmétique en trente-deux chapitres, suivi d'un traité de musique en soixante et un chapitres, comme Boulliau l'a cru.

(17) *Musique*, c. 39-49 (c'est-à-dire *Arithmétique*, c. 71-81), p. 155-166 de Boulliau.

sixième, ὁ ἕκτος, pour dire *le nombre* 6. Je réponds qu'il ne l'aurait pas pu, si l'expression ὁ ἕκτος, seule et indépendamment de toute énumération, n'avait pas été employée en ce sens par les pythagoriciens. Mais on peut présumer que les pythagoriciens l'avaient employée ainsi d'après quelque idée spéculative qui voulait que ce nombre eût un nom masculin, peut-être, par exemple, à cause du rôle *nuptial* qu'ils lui attribuaient et dans lequel le genre masculin devait dominer, ou bien à cause d'une certaine *perfection* qu'ils reconnaissaient à ce nombre, comme premier nombre égal à la somme de ses facteurs (18). On peut trouver un indice de cet emploi philosophique des mots ὁ ἕκτος chez Théon de Smyrne; car ce n'est sans doute pas sans raison, que dans son chapitre consacré au nombre 6, il ne le nomme pas une seule fois ἡ ἑξάς, mais toujours ὁ ἕκτος sans substantif, tandis qu'aucun des neuf autres nombres n'est désigné une seule fois par l'adjectif ordinal avec ou sans substantif dans les neuf chapitres qu'il leur a consacrés. Il est donc permis de conjecturer que, si le platonicien Théon a employé ici cette forme insolite, c'est parce qu'il l'avait trouvée dans Platon et précisément dans notre passage. Mais pourquoi, au lieu du mot ἑξάς, Platon serait-il allé chercher le mot ἕκτος, pris substantivement, expression très-peu usitée sans doute, puisqu'elle ne se trouve employée ainsi chez aucun autre auteur, si ce n'est chez Théon de Smyrne? Je n'hésite pas à répondre : c'est peut-être d'après quelque tradition pythagoricienne; mais c'est surtout parce que Platon faisait une énigme et qu'il voulait la faire difficile à deviner. Nous avons vu la même intention se trahir avec évidence dans d'autres expressions de ce passage. Lycophron, dans son *Alexandra*, ne procède pas autrement : il désigne chaque objet par le terme le moins usité dans le sens où il l'emploie. Quoi qu'il en soit, ce qu'il y a de certain, je le répète, c'est qu'au lieu du mot ἑκατόν il faut lire un mot signifiant 6.

Il me reste à dire quelques mots sur une correction ingénieuse que je n'ai pas adoptée. M. Vincent cite comme *soutenable*, mais non comme vraie, une conjecture qui l'avait séduit au premier coup d'œil, et d'après laquelle, au lieu des mots ἑκατὸν δὲ κύβων τριάδος, il faudrait lire ἔσχατον δὲ κύβον τριάδος. Ce serait donc un seul *cube du ternaire* qu'il s'agirait d'ajouter *en dernier lieu*. Or $700+2+27=729$. Suivant la même conjecture, il faudrait supposer une lacune après les mots προμήκει δέ, qui termineraient le passage relatif au nom-

(18) Voy. plus loin, § 6, et spécialement notes 42 et 69.

bre 864 et aux générations humaines ; il faudrait, enfin, supposer que, dans une phrase perdue, Platon revenait au *nombre parfait* qui embrasse les révolutions célestes : ce nombre parfait serait 729. M. Vincent remarque que, suivant un passage du IXe livre de la *République*, 729 étant la sixième puissance de 3, la vie d'un bon roi est tout juste 729 fois plus heureuse que celle d'un tyran (19). M. Bœckh observe que ce même nombre 729 est le carré de 27, terme le plus élevé du diagramme musical de Platon dans le *Timée*, et qu'il est le nombre des mois lunaires compris dans le cycle philolaïque de 59 ans (20). Ajoutez que c'est en même temps le nombre de jours de deux années philolaïques de 364 jours et 1/2 chacune (21). Mais, quelque important que fût ce nombre 729, appliqué ainsi par les pythagoriciens aux périodes solaires et lunisolaires et par Platon à l'évaluation de la supériorité des rois sur les tyrans, ce nombre n'a rien à faire ici. D'abord, la leçon ἔσχατον δὲ κύϐον offre un accusatif, qui ne va pas avec les génitifs précédents. Quant à la leçon ἐσχάτου δὲ κύϐου, qui serait grammaticalement plus acceptable, elle repose exclusivement sur une conjecture arbitraire d'un certain Pierre Prades, cité par Boulliau (22), et qui, en 1625, je ne sais dans quel ouvrage (23), avait publié ce passage en le *corrigeant*, c'est-à-dire en l'*altérant*. Ensuite la supposition d'une lacune dans notre texte est non-seulement invraisemblable, mais fausse, puisque tout s'explique sans cette supposition, et puisque, comme je l'ai montré et comme M. Vincent l'a bien vu lui-même, les mots où il avait d'abord été tenté de chercher le nombre 729 concernent le nombre 864. Enfin le *nombre parfait* auquel Platon avait fait allusion précédemment et dont il ne s'occupe plus dans cette phrase n'est pas 729, mais très-probablement 360, comme je vais le montrer.

§ V.

En effet, bien que Platon n'en parle ici que sous forme de prétermission et avant de poser son énigme du *nombre nuptial*, il est bon, ne fût-ce qu'à titre de comparaison, de nous occuper aussi du *nombre parfait* qui, suivant lui, préside aux révolutions de ce qui

(19) *République*, IX, p. 587.

(20) Voy. M. Bœckh, *Philolaos*, p. 135; Platon, *Timée*, p. 35 B, C, et Censorin, c. 18, p. 94 de Lindenbrog.

(21) Voy. Censorin, c. 19, p. 101 de Lindenbrog.

(22) Édition de l'*Arithmétique* de Théon de Smyrne (Paris, 1644, in-4), p. 293.

(23) Ce n'était pas dans une édition de Platon.

est *divin et engendré*, c'est-à-dire des astres. Ce nombre doit être plus parfait et plus simple que celui qui régit les générations humaines. Platon ne le définit pas ici ; mais Aristide Quintilien (24), probablement d'après les traditions pythagoriciennes et platoniciennes, supplée à son silence : pour trouver ce nombre, au lieu de faire la somme des cubes des côtés 3, 4 et 5 du triangle prototype et d'arriver ainsi à 216, on fait tout de suite la somme de ces trois côtés eux-mêmes et l'on arrive à 12. Au lieu de prendre le nombre 216 pour base d'un nouveau triangle semblable au premier, et de trouver, en additionnant les côtés de ce triangle, le nombre 864, qui comprend le cube de 3 multiplié par 6 et le carré de 10 multiplié par 7, plus le nombre 2, on multiplie simplement le nombre 12 par 3 et le produit par 10, et l'on a le nombre 360. En effet, l'interprétation philosophique de l'énigme de Platon va nous montrer quels rapports de formation et de signification les pythagoriciens pouvaient trouver entre les nombres 216 et 864, qui règlent les générations humaines, et les nombres 12 et 360, qui règlent les révolutions célestes : cette comparaison nous confirmera dans cette pensée, que très-probablement les deux derniers nombres, donnés par Aristide Quintilien seul, sont bien ceux auxquels Platon voulait faire allusion, de même que les deux premiers sont bien certainement ceux qu'il voulait indiquer dans son énigme.

§ VI.

Pour nous faciliter cette tâche de l'interprétation philosophique, non moins ardue que l'explication littérale du texte, il serait à souhaiter que ce passage de Platon eût été commenté d'une manière suivie par quelque auteur ancien initié aux spéculations arithmétiques de l'école pythagoricienne. Un passage du commentaire de Jamblique sur l'*Arithmétique* de Nicomaque (25) semble donner d'abord cette espérance ; mais, en l'examinant, on voit, comme Ficin l'avait remarqué, que cette espérance est trompeuse, attendu que Jamblique, au lieu d'expliquer l'énigme de Platon concernant les nombres qui président aux générations humaines bien ordonnées, cherche dans son imagination quelles peuvent être les combinaisons vicieuses de nombres qui produisent les générations mauvaises : c'est pourquoi il n'a fait qu'égarer les commen-

(24) *De la musique*, III, p. 152 de Meybaum.

(25) Voy. Jamblique, *sur l'Arithmétique de Nicomaque*, p. 116 de Tennulius.

tateurs de ce passage du VIII[e] livre de la *République*, quand ils ont voulu le suivre (26).

Cherchons donc chez d'autres auteurs de l'antiquité les éléments épars du commentaire que Jamblique a semblé promettre et qu'il n'a pas du tout donné. Cet auteur (27) nous fournit pourtant une dénomination juste : il appelle *nombre nuptial* (γαμικὸς ἀριθμός) le *nombre de la République de Platon*. En effet, suivant Platon lui-même, ce nombre doit présider aux mariages, et tout tombe en décadence dans un État, quand les mariages n'y sont pas réglés convenablement d'après ce nombre. Je n'examine pas en ce moment jusqu'à quel point cette opinion pouvait être sérieuse de la part du grand philosophe ; je la prends pour ce qu'elle vaut, et je l'explique d'après les idées mystiques et symboliques des pythagoriciens.

Le tableau que nous avons dressé ci-dessus d'après les indications de Platon contient de haut en bas et de gauche à droite *quatre termes* et *trois intervalles*. Ces nombres 4 et 3 ont leur signification. Car, pour les pythagoriciens, 4 est le nombre sacré par excellence (28) : suivant eux, le nombre 10, ce *nombre parfait*, le plus grand des *nombres naturels* et le type de l'ordre du monde (29), est engendré par le nombre 4, attendu que le nombre 10 résulte de l'addition des *quatre* premiers nombres à partir de l'unité (30); en outre, le nombre 4 représente la justice, et il est à la fois le symbole de l'essence spirituelle et de l'essence corporelle (31). Quant au nombre 3, c'est *le plus beau des nombres :* égal à la somme de ceux qui le précèdent à partir de l'unité (32), il est le symbole de la sagesse et de la piété (33), de l'amitié, de la paix, de l'harmonie et enfin *du mariage* (34). Voilà sans doute pourquoi il fallait qu'il y eût

(26) Comp. Ficin, argument du VIII[e] livre de la *République*.

(27) *L. c.*, p. 116 de Tennulius. Plutarque (*Sur Isis et Osiris*, c. 59) appelle toute cette construction arithmétique et géométrique de Platon *la Figure nuptiale*, τὸ γαμήλιον διάγραμμα.

(28) Voy. Théon de Smyrne, *Musique*, c. 38 (*Arithmétique*, c. 70), p. 147-155 de Boulliau, la *Théologie arithmétique*, c. 4, et Lucien, *Sur une chute faite en saluant*, c. 5.

(29) Voy. Théon de Smyrne, *Musique*, c. 39 et 49 (*Arithmétique*, c. 71 et 81), p. 155 et 166 de Boulliau, la *Théologie arithmétique*, c. 10, et Aristote, *Métaphysique*, I, 5.

(30) Voy. le faux Plutarque, *Des opinions des philosophes*, I, 3, § 17; Théon de Smyrne, *Musique*, c. 37, 38 et 39 (*Arithmétique*, c. 69, 70 et 71), p. 146-149 et p. 155 de Boulliau, et la *Théologie arithmétique*, c. 4, p. 16 et 18 d'Ast (p. 18 et 20 de Wechel).

(31) *Théologie arithmétique*, c. 4, p. 23 d'Ast (p. 24, 25 de Wechel).

(32) *Ibidem*, c. 3, p. 12, 13 d'Ast (p. 14 de Wechel).

(33) *Ibidem*, c. 3, p. 14 d'Ast (p. 16 de Wechel).

(34) *Ibidem*, c. 3, p. 16 d'Ast (p. 18 de Wechel).

quatre termes et *trois* intervalles dans chaque ligne horizontale et dans chaque colonne verticale du tableau de Platon. Le bon ordre des mariages exigeait, en outre, que tous ces termes fussent *rationnels* et *en proportion*. Voilà pourquoi les quatre lignes horizontales sont quatre progressions géométriques de nombres entiers : chacune de ces progressions de quatre termes commence par l'unité, principe fécond de toutes choses (35). La raison de la première progression est l'unité, qui, restant elle-même à toutes ses puissances, devient également le premier terme de chacune des quatre colonnes verticales. La raison de la seconde progression est 2, premier nombre pair et *femelle* (36), symbole de la génération et de la *matière* (37). La raison de la troisième progression est 3, premier nombre impair et *mâle* (38), symbole de la *forme* (39). Il est à remarquer que la deuxième et la troisième ligne de ce tableau, en n'y prenant l'unité qu'une fois, reproduisent les sept nombres fondamentaux du diagramme musical de Platon dans le *Timée* (40). Le plus grand de ces nombres, 27, troisième puissance du nombre *mâle* 3, *commande* arithmétiquement (41) les six autres nombres, c'est-à-dire qu'il est égal à leur somme. En effet, $1+2+3+4+8+9=27$. N'était-il pas juste que le *commandement* appartînt à une *puissance* du nombre *mâle?* La raison de la quatrième progression est 6, nombre *nuptial* par excellence (42), qui contient comme facteurs et *commande* ainsi géométriquement (43) le nombre *mâle* 3 et le nombre *femelle* 2. De même la seconde et la troisième puissance du *nombre nuptial* 6 contiennent chacune comme facteurs et *commandent* géométriquement les puissances correspondantes du nombre *mâle* et du nombre *femelle*. A chacun de ces groupes de facteurs différents et *causes de diversité* (ἀνομοιούντων) se joint l'unité, qui, comme facteur, ne produit aucun changement, mais est un *principe d'identification* (ὁμοιούντων). Les progressions s'arrêtent aux troisièmes puissances du nombre *fe-*

(35) *Ibidem*, c. 1, p. 3 d'Ast (p. 5 de Wechel).

(36) Théon de Smyrne, *Musique*, c. 45 (*Arithmétique*, c. 77), p. 160 de Boulliau; *Théologie arithmétique*, c. 6, p. 33 d'Ast (p. 34 de Wechel), et Aristide Quintilien, *Musique*, III, p. 151-152 de Meybaum.

(37) Théon de Smyrne, *Musique*, c. 41 (*Arithmétique*, c. 73), p. 156 de Boulliau, et la *Théologie arithmétique*, c. 2, p. 8 d'Ast (p. 9 de Wechel).

(38) Voy. les textes indiqués dans la note 36.

(39) *Théologie arithmétique*, c. 3, p. 15 d'Ast (p. 16 de Wechel).

(40) *Timée*, p. 35 B. Voy. mes *Études sur le Timée*, note 23.

(41) Cette expression a été expliquée ci-dessus, § 3.

(42) Voy. les textes indiqués dans la note 36, et Plutarque, *De la psychogonie du Timée*, c. 13.

(43) Cette expression a été expliquée ci-dessus, § 3.

melle, du nombre *mâle* et du nombre *nuptial*, parce que les troisièmes puissances représentent la réalité concrète de la substance corporelle, qui a trois dimensions (44). Voilà pourquoi le nombre 216, cube du nombre *nuptial*, *commandant* géométriquement et réunissant en lui comme facteurs les cubes du nombre *mâle* et du nombre *femelle*, doit être le terme et le couronnement de ce tableau. Tout bon pythagoricien devait donc attribuer à ce nombre 216 un grand rôle dans les générations humaines. En effet, suivant les pythagoriciens, les naissances des corps humains dans lesquels l'âme de Pythagore avait passé successivement par la métempsycose s'étaient succédé à des intervalles de 216 ans (45). En outre, le nombre 216 se composait, suivant eux, du nombre *nuptial* 6 et de 210, nombre des jours après lesquels un enfant peut naître viable (46).

Ce tableau de seize nombres disposés en échiquier paraît d'ailleurs, suivant la remarque de M. Vincent, avoir un rapport frappant avec un jeu pythagoricien qui se nommait en grec le *combat des nombres*, ἀριθμομαχία. Ce jeu donnait lieu à une sorte de divination : l'on jouait pour et contre le succès d'une entreprise, d'un empire, d'une naissance; le gain ou la perte de la partie annonçait l'événement heureux ou malheureux. On comptait tant pour une proportion, tant pour une progression, tant pour une puissance, tant pour telle ou telle combinaison numérique plus ou moins estimée; de sorte que les joueurs devaient être très-exercés dans la décomposition des nombres. Platon semble bien avoir voulu faire allusion à ce jeu, dans ce passage où il fait dépendre de certaines combinaisons numériques les destinées des États. Avant de poser ces nombres mystérieux, il dit que ce sont les Muses qui vont prendre la parole sur un ton sérieux et tragique, mais *en jouant* et en se raillant comme avec des enfants. Sur ce jeu, il ne nous reste aucun document antique; mais au moyen âge ce jeu se retrouve. Le nom ἀριθμομαχία, confondu mal à propos avec ῥυθμομαχία, a donné le mot *rhythmomachia*, nom de ce jeu dans la latinité du moyen âge. Un opuscule intitulé *Regulæ de rhythmomachia*, et où Boèce se trouve cité, a été composé dans la première moitié du Xe siècle par saint Odon, abbé de Cluny, et a été publié au XVIIIe siècle par le savant moine autrichien Martin Gerbert, abbé de Saint-

(44) Voy. Aristide Quintilien, *Musique*, III, p. 151, l. 26, 27 de Meybaum.

(45) *Théologie arithmétique*, c. 6, p. 40 d'Ast (p. 41 de Wechel).

(46) Voy. Aristide Quintilien, *Musique*, III, p. 151, 152 de Meybaum, et Plutarque, *De la psychogonie du Timée*, c. 12.

Blaise (47). Au XVIe siècle, on a essayé de faire revivre ce jeu : Le Febvre d'Étaples en donna une courte description dans un opuscule de cinq pages (48) ; un certain Claude de Boissière le décrivit amplement dans un ouvrage (49) qui a eu plusieurs éditions tant en français qu'en latin. En Italie, le savant vénitien François Barozzi publia sur le même sujet un traité italien, rédigé à l'imitation du traité de Claude de Boissière (50); et une traduction allemande de ce traité de Barozzi a été publiée par Auguste duc de Brunswic-Lunebourg, sous le pseudonyme de Gustavus Selenus, à la suite de son traité allemand sur le jeu d'échecs (51).

Mais revenons à Platon. Après la partie de son énigme qui a rapport à ce tableau numérique, Platon prend le nombre *nuptial* cubique 216 pour le plus petit côté d'un triangle semblable au triangle rectangle dont les côtés sont 3, 4 et 5; la somme des trois côtés de ce nouveau triangle lui donne le nombre 864. Pourquoi la figure triangulaire intervient-elle ici ? C'est que, suivant Platon et les pythagoriciens (52), le triangle était le principe de toute génération. Pourquoi le triangle choisi par Platon a-t-il deux angles aigus et un angle droit? C'est parce que, suivant les pythagoriciens (53),

(47) *Scriptores ecclesiastici de musica sacra*, t. I, p. 285 et suiv. Saint Blaise, 1784, trois parties in-4.

(48) *Rithmimachie Ludus, qui et pugna numerorum appellatur*, à la suite de l'*Arithmetica* de Jordanus Nemorarius (Paris, H. Estienne, 1514, in-4).

(49) *Le jeu pythagorique dit Rhythmomachie*, par Claude de Boissière (Paris, 1556, in-8).

(50) *Il nobilissimo ed antichissimo giuoco pitagorico chiamato ritmomachia, cioè battaglia di consonanze di numeri*, etc. (Venise, 1572, in-4).

(51) Leipzig, 1610, in-fol. Le P. Casimir Oudin(*De scriptoribus ecclesiasticis, supplementum*, p. 315), Fabricius (*Bibliotheca mediæ et infimæ latinitatis*, au mot *Gerbertus*) et les Bénédictins auteurs de l'*Histoire littéraire de France* (t. VI, p. 581) ont cité cette traduction faite et publiée par le duc de Brunswic, comme une édition d'un traité du célèbre moine du Xe siècle, Gerbert, qui fut pape sous le nom de Sylvestre II. Voy. Græsse, *Lehrbuch zur Literaturgeschichte der berühmtesten Vœlker des Mittelalters*, 1re Abtheilung, 1re Hælfte, p. 530. Voici quel a pu être le prétexte de cette erreur. Une *arithmomachia*, qui se trouve anonyme dans le manuscrit latin 7185 de la Bibliothèque impériale de Paris et qui est restée inédite, avait été attribuée sans motif suffisant au pape Gerbert, parce que la *Géométrie* de Gerbert se trouve plus haut dans le même manuscrit. Voyez l'ancien catalogue imprimé des manuscrits latins de cette bibliothèque, cod. 7185, n°s 4 et 7. Comparez *Catalogus Bibliothecæ Thuanæ*, t. II, p. 434 (Lauenbourg, 1710, in-8), et Mabillon, *Analecta vetera*, 1re éd., t. II, p. 212. Le Febvre d'Étaples et Claude de Boissière avaient sans doute mis à profit soit ce traité anonyme, soit celui de saint Odon.

(52) Voy. Platon, *Timée*, p. 53 et suiv., p. 73 et suiv., et p. 82, et Proclus, *Sur le premier livre d'Euclide*, II, p. 46, l. 33 et l. 46-48, et p. 47, l. 1-15, éd. gr. de Bâle.

(53) Voy. Proclus, *ibidem*, p. 37, l. 1-33, et p. 46, l. 47, 48.

l'angle droit est le principe de l'essence stable et permanente, tandis que les autres angles sont des principes de mouvement et de variabilité. Pourquoi, parmi les triangles rectangles, Platon a-t-il choisi celui dont les côtés sont 3, 4 et 5 et dont l'aire est 6? C'est parce que, comme nous le verrons bientôt, ce triangle était vénéré dans l'école pythagoricienne comme le premier et le plus simple des triangles rectangles dans lesquels les trois côtés sont des quantités rationnelles en nombres entiers. D'ailleurs, nous venons de rappeler les vertus attribuées par les pythagoriciens au *beau* nombre 3 et au nombre *sacré* 4, qui représentent les côtés de l'angle droit, et au nombre *nuptial* et *parfait* 6, qui représente l'aire de ce triangle. Quant au nombre 5, qui représente l'hypoténuse, c'est encore suivant les pythagoriciens (54), un nombre *nuptial*, parce qu'il réunit par addition et *commande* arithmétiquement le premier nombre *mâle* 3 et le premier nombre *femelle* 2. Enfin, suivant la remarque d'Aristide Quintilien (55), le plus grand côté de l'angle droit, 4, nombre *femelle*, ajouté successivement et séparément à l'hypoténuse 5, nombre *mâle*, et à l'autre côté 3, nombre *mâle* aussi, donne les nombres 9 et 7, qui sont les nombres des mois après lesquels les enfants naissent viables, tandis que les nombres *mâles* 3 et 5 du plus petit côté et de l'hypoténuse, ajoutés ensemble, donnent 8, nombre de mois considéré par les anciens comme incompatible avec la viabilité des enfants. Suivant Plutarque (56), le côté 3 représente le mâle, le côté 4 la femelle, et l'hypoténuse 5, somme du nombre femelle 2 et du nombre mâle 3, représente l'enfant né de leur union. On voit donc bien que ce triangle devait être regardé comme présidant d'une manière toute spéciale aux générations humaines.

Maintenant, dans le triangle dont le plus petit côté est 216 et qui est semblable au triangle dont les côtés sont 3, 4 et 5, ce côté 216, qui est le cube du *nombre nuptial* 6, et qui réunit comme facteurs les cubes du *nombre mâle* 3 et du *nombre femelle* 2, est en même temps la somme des cubes des trois côtés du triangle rectangle prototype. Dans le triangle dont la base est 216, la somme des côtés est 864, produit du *nombre nuptial* cubique 216 et du *nombre sacré* 4. Platon considère ce même nombre 864 comme la somme du carré de 8, nombre *harmonique* par excellence, et du produit de ce même nombre *harmonique* 8 par le carré de 10, *nombre parfait*, type de l'ordre

(54) *Théologie arithmétique*, c. 5, p. 24 d'Ast (p. 25 de Wechel), et Plutarque, *De l'inscription de Delphes*, c. 8.

(55) *Musique*, III, p. 151 de Meybaum.

(56) *Sur Isis et Osiris*, c. 56.

du monde (57). Enfin Platon considère ce même nombre 864 comme composé du premier *nombre femelle* 2, du cube du premier *nombre mâle* 3, multiplié par le *nombre nuptial* 6, et du carré du *nombre parfait* 10, multiplié par 7, nombre qui, parmi ses attributions, a celle de présider, d'une part aux périodes de la vie humaine et aux phases des maladies (58), d'autre part à la naissance des enfants viables (59). Voilà certes, dans les opinions des anciens pythagoriciens, de quoi justifier l'influence attribuée par Platon au *nombre nuptial* 864 sur les mariages et par suite sur l'ordre des États.

Mais, dans la dernière décomposition de ce nombre, Platon a pris soin de nous faire remarquer que 7 est la partie entière de la diagonale irrationnelle du carré dont le côté est 5, ou bien de l'hypoténuse irrationnelle d'un triangle rectangle isoscèle dans lequel chacun des côtés de l'angle droit est 5. Remarquons que l'hypoténuse de tout triangle rectangle isoscèle est nécessairement irrationnelle, puisque, x étant le côté de l'angle droit, l'hypoténuse est $x\sqrt{2}$. Or, lorsque les deux côtés de l'angle droit et la valeur approximative de l'hypoténuse sont des nombres entiers, la plus petite différence possible entre le carré de cette valeur approximative et le carré de l'hypoténuse vraie irrationnelle est 1, puisque ces deux carrés sont des nombres entiers. Soit donc y le nombre entier le plus rapproché de la valeur vraie de l'hypoténuse. Le triangle rectangle étant isoscèle, on a l'équation $2x^2 = y^2 \pm 1$, quand la différence est égale au *minimum* 1. Or il est aisé de voir que les plus petits nombres qui puissent satisfaire à cette équation sont 7 pour y et 5 pour x. Le triangle rectangle dans lequel chaque côté de l'angle droit est 5 est donc en nombres entiers le triangle rectangle isoscèle le plus simple dans lequel la différence entre le carré de l'hypoténuse approximative et le carré de l'hypoténuse vraie irrationnelle soit égale au *minimum* 1. Cependant, quelque petite que soit cette différence, il y a ici une valeur inexacte substituée à une quantité irrationnelle. Cette dernière décomposition manifeste donc, d'après les spéculations pythagoriciennes, une imperfection du nombre 864. Aussi ce nombre préside-t-il aux choses humaines, toujours imparfaites par quelque côté, et qui portent en elles-mêmes le principe de leur décadence, comme Platon l'avoue, même en ce qui concerne sa *république idéale*.

(57) Sur la signification des nombres 8 et 10, voy. les textes cités dans les notes 15 et 29.

(58) Voy. le traité hippocratique *Des semaines*, la *Théologie arithmétique*, c. 7, etc.

(59) *Théologie arithmétique*, c. 7, p. 42 d'Ast (p. 43 de Wechel).

Cette remarque nous sert de transition toute naturelle pour arriver à l'explication philosophique du *nombre parfait* 360, qui, suivant Platon interprété avec l'aide d'Aristide Quintilien, préside aux révolutions célestes. Or, Platon enseigne que les astres sont *divins*, mais pourtant *engendrés* (60), et que le triangle est le principe de toute génération (61), même de celle de ces corps divins formés de feu suivant lui (62). Nous ne devons donc pas être surpris de retrouver ici le triangle rectangle le plus parfait, celui dont les côtés sont 3, 4 et 5. Mais nous ne retrouverons pas ici le triangle rectangle isoscèle dans lequel chaque côté de l'angle droit est 5 et l'hypoténuse est irrationnelle; aucun nombre irrationnel ou approximatif ne doit entrer dans la composition du *nombre parfait*. De même, il n'y a plus lieu ici de chercher un nouveau triangle qui soit semblable à celui dont les côtés sont 3, 4 et 5, et dont le plus petit côté soit 216, égal à la somme des cubes de 3, de 4 et de 5, et égal en même temps au cube du *nombre nuptial* 6, puis de faire la somme des côtés de ce nouveau triangle, pour avoir 864 : cette formation des cubes est nécessaire quand il s'agit des destinées des hommes et de leurs corps grossiers et terrestres (63); mais elle ne l'est pas quand il s'agit des révolutions des corps célestes et immortels. Pour trouver le nombre qui régit ces révolutions, il faut tout de suite faire la somme des côtés 3, 4 et 5 : ce qui donne 12, aire complète du rectangle dont les côtés sont 3 et 4 et dont la diagonale exacte et rationnelle est 5, tandis que, suivant la remarque de l'auteur de la *Théologie arithmétique* (64), le *nombre nuptial* 6 n'est que la moitié de cette même aire. Enfin le nombre 12 doit être multiplié par 3, *le plus beau des nombres*, symbole de l'harmonie et de la concorde (65), et le produit doit être multiplié par 10, le *nombre parfait*, symbole de l'ordre du monde (66) : le dernier produit est 360. Les nombres 3 et 10 figurent aussi dans la dernière décomposition du *nombre nuptial* 864, mais l'un à la troisième puissance et l'autre à la seconde, et ils y sont associés à d'autres nombres moins parfaits. Au contraire, comme le dit Aristide Quintilien (67), 360 est vraiment un

(60) Voy. les textes indiqués dans la note 6.
(61) Voy. les textes de Platon et de Proclus indiqués dans la note 47.
(62) Voy. Platon, *Timée*, p. 40 A, et mes *Études sur le Timée*, t. II, p. 138-144.
(63) Voy. Platon, *Timée*, p. 55 B, C, D, E, et p. 73 et suiv.
(64) C. 6, p. 39 d'Ast (p. 40 de Wechel).
(65) *Théologie arithmétique*, c. 3, p. 16 d'Ast (p. 18 de Wechel).
(66) Voy. les textes cités dans la note 29.
(67) *Musique*, III, p. 152 de Meybaum.

nombre parfait, parce que ses trois facteurs 12, 3 et 10 sont des *nombres parfaits*. En effet, la qualification de *nombre parfait* était donnée à chacun de ces trois nombres par les pythagoriciens pour des raisons différentes, savoir : elle était donnée au nombre 3, parce qu'il représente le commencement, le milieu et la fin, parce qu'il est égal à la somme des deux nombres 1 et 2, qui le précèdent, et parce que, ajouté lui-même à ces deux nombres il donne 6, *nombre parfait* (68), ainsi nommé (69) comme étant égal à la somme de ses facteurs 1, 2 et 3. Cette même qualification était donnée au nombre 10, parce qu'il est égal à la somme des quatre premiers nombres (70), parce que la série des nombres de 1 à 10 contient tout juste autant (71) de nombres impairs et premiers, 1, 3, 5 et 7, que de nombres pairs et composés, 4, 6, 8 et 10, et parce qu'après le nombre 10 la numération revient toujours sur elle-même (72). Enfin, cette qualification était donnée au nombre 12, parce que, dans la série des nombres de 1 à 12, il y a de même autant (73) de nombres impairs et premiers, 1, 3, 5, 7 et 11, que de nombres pairs et composés, 4, 6, 8, 10 et 12. L'application de ces trois nombres à l'astronomie est d'ailleurs évidente; car, suivant la remarque d'Aristide Quintilien (74), 12 est le nombre des divisions principales du zodiaque; en multipliant 12 par 3, on a 36, nombre dit ὡρονόμος, c'est-à-dire présidant à l'horoscope, parce qu'il est égal au nombre des décans; en multipliant 36 par 10, on a 360, nombre des degrés du cercle.

Ici une question se présente : quel rapport y a-t-il entre le *nombre parfait* de la *République* et celui dont il est question dans le *Timée ?* Platon, dans le *Timée* (75), dit que *le nombre parfait du temps* est rempli et que l'*année parfaite* est révolue, lorsque toutes les huit révolutions, de vitesses différentes, venant à s'achever ensemble, se retrouvent comme au premier point de départ, après un temps me-

(68) *Théologie arithmétique*, c. 3, p. 13, 14 et 15 d'Ast (p. 14 et 16 de Wechel).

(69) *Théologie arithmétique*, c. 6, p. 33 d'Ast (p. 34 de Wechel); Théon de Smyrne, *Arithmétique*, c. 32, p. 70, 71, et *Musique*, c. 45 (*Arithmétique*, c. 77), p. 160 de Boulliau, et Plutarque, *De la psychogonie du Timée*, c. 13.

(70) *Théologie arithmétique*, c. 3, p. 13 d'Ast (p. 14 de Wechel), et c. 10, p. 65 d'Ast (p. 64 de Wechel).

(71) *Théologie arithmétique*, c. 10, p. 61, 62 d'Ast (p. 62 de Wechel).

(72) *Ibidem*, c. 10, p. 59 d'Ast (p. 60 de Wechel), et le faux Plutarque, *Des opinions des philosophes*, I, 3, § 16.

(73) *Ibidem*, c. 10, p. 62 d'Ast (p. 62 de Wechel).

(74) *Musique*, III, p. 150 et 152 de Meybaum.

(75) *Timée*, p. 39 D.

suré sur la révolution de ce qui reste toujours le même avec une marche uniforme, c'est-à-dire sur la révolution diurne apparente de la sphère des étoiles fixes autour de la terre. En d'autres termes, la *grande année platonique* devait contenir un nombre entier de révolutions de la huitième sphère, c'est-à-dire de jours sidéraux, et un nombre entier de révolutions sidérales de la lune, du soleil, de Mercure, de Vénus, de Mars, de Jupiter et de Saturne. Divers auteurs anciens ont cherché à trouver par le calcul combien cette *grande année platonique* devait contenir d'années tropiques (76). La diversité des résultats montre qu'ils n'en savaient rien, non plus que Platon. Remarquons que cette *grande année*, telle que Platon la concevait, n'avait aucun rapport avec la période de *précession des équinoxes* ignorée de Platon et niée par Proclus (77). Suivant Proclus (78), le *nombre parfait* du *Timée* et le *nombre parfait* du VIIIe livre de la *République* devaient différer, en ce que le dernier devait contenir un nombre entier de fois, non-seulement la révolution diurne sidérale du ciel entier autour de la terre d'orient en occident et les révolutions sidérales du soleil, de la lune et des cinq planètes d'occident en orient, mais de plus certains mouvements propres qui ont lieu parmi les étoiles fixes, et tous les autres mouvements périodiques, visibles ou invisibles, qui s'opèrent dans l'univers. Mais cette distinction me paraît étrangère à la pensée de Platon, qui, dans le *Timée* et dans la *République*, a voulu désigner une seule et même *grande année*, sans aucune prétention de la mesurer. Dans le *Timée*, il nous indique que l'unité de mesure devait être tirée de la révolution diurne sidérale. Dans la phrase du VIIIe livre de la *République*, si l'on accepte l'interprétation d'Aristide Quintilien justifiée par son analogie parfaite avec le reste du passage, Platon avait en vue le nombre 360, qui est celui des parties du jour sidéral et des parties de l'année tropique suivant une division calquée sur celle du cercle en 360 degrés. Ainsi, dans la pensée de Platon, la longueur de la *grande année* reste indéterminée ; mais le nombre qui l'exprimera devra être un multiple du nombre 360 donné à priori. De même, le nombre 864, qui règle les mariages, les générations humaines et les destinées des États, ne représentait, dans la pensée de Platon, aucune durée déterminée, mais pouvait, de même

(76) Voy. mes *Études sur le Timée*, note 34, t. II, p. 78-80.

(77) *Sur le Timée*, p. 277 D, E, éd. de Bâle (p. 671, 672 de Schneider), et *Hypotyposes*, p. 150, éd. d'Halma (comp. p. 69, 70 et p. 113, l. 4, 5). Voy. le texte de Proclus, et non la traduction française d'Halma.

(78) *Sur le Timée*, p. 271 B, éd. de Bâle (p. 647, l. 14-22 de Schneider).

que 360, être multiplié par différents nombres, comme il l'était, ainsi que nous le verrons, dans les grandes périodes cycliques des Orientaux (79).

§ VII.

J'ai commenté le nombre de Platon, en me plaçant au point de vue de l'école pythagoricienne, dont Platon se faisait ici, du moins en apparence, le disciple fidèle. Que faut-il penser de ces spéculations platoniciennes, et qu'en pensait Platon lui-même? Certes, Socrate, qu'il met ici en scène, aurait pu citer ces spéculations avec une complaisance ironique, mais il n'y aurait pas adhéré sérieusement. Platon lui-même ne pouvait pas les admettre sans réserve. En effet, il distinguait trois sphères de connaissances, les *idées*, les nombres et les choses sensibles; tandis que les pythagoriciens, identifiant les idées et les nombres, prétendaient trouver dans les nombres les principes immanents de l'ordre du monde et de l'essence des êtres individuels, et avaient le tort de passer, en vertu de conclusions téméraires, d'un de ces ordres de notions à l'autre, comme Aristote (80) a eu raison de leur reprocher : le système des dix sphères, complété par la sphère de l'*antichthone* imaginaire (81), le cycle solaire biennal de 729 jours et le cycle luni-solaire de 729 lunaisons en 59 ans (82), sont des exemples frappants de cet abus que les pythagoriciens faisaient de l'arithmétique spéculative dans l'ordre des choses physiques. Quant à Platon, il admettait qu'entre les *idées*, les nombres et les lois physiques il n'y avait pas identité, mais seulement ressemblance, et les nombres étaient pour lui un intermédiaire entre les *idées* immuables et les êtres changeants (83). Il était donc entraîné moins fortement que les pythagoriciens à conclure faussement de l'un de ces ordres de notions à l'autre. Pourtant il était aussi sur la pente qui conduit aux assimilations forcées entre les théorèmes mathématiques, les propositions métaphysiques et les lois physiques; et il faut avouer qu'il a glissé quelquefois sur cette pente. Mais heureusement chez lui ce ne sont pas les nombres, ce sont les *idées* et les vérités morales, qui dominent: ce sont ces idées et ces vérités qu'il cherche d'abord,

(79) Voy. plus loin, fin du § 8.
(80) *Métaphysique*, I, 5.
(81) Voy. mes *Études sur le Timée*, t. II, p. 92-101.
(82) Voy. plus haut, § 4, notes 20 et 21.
(83) Voy. mes *Études sur le Timée*, t. I, p. 351-353 et p. 367, 368.

en s'adressant à la conscience et à la raison ; ensuite seulement il cherche quelquefois à en retrouver l'image et le symbole dans les vérités mathématiques; et même alors il y a souvent lieu de douter que pour lui cette assimilation fût autre chose qu'un rapprochement ingénieux et une hypothèse séduisante. Par exemple, ce ne sont pas ses spéculations sur le *nombre nuptial* qui lui ont dicté ses préceptes politiques sur l'ordre de la famille; mais ces spéculations viennent seulement après coup prêter à ces préceptes une sorte de consécration mystérieuse, capable d'agir sur certaines imaginations, et je doute qu'il fût lui-même dupe de cet artifice d'exposition. N'indique-t-il pas lui-même, comme nous l'avons vu, que son *nombre nuptial* est un *jeu d'enfants, où les Muses se jouent, malgré leur ton tragique et leur gravité affectée ?*

Ces spéculations transcendantes sur les nombres ont été de tout temps plus dangereuses que profitables pour la philosophie, et elles ont encombré quelquefois les mathématiques d'un bizarre cortége d'hypothèses et d'erreurs. Cependant, du moins dans les premiers temps, elles ont été utiles au développement de l'arithmétique et de la géométrie, en excitant l'ardeur des recherches. De même que les alchimistes du moyen âge, en cherchant la *pierre philosophale*, ont fait des découvertes chimiques très-précieuses, de même le désir de trouver certaines applications imaginaires des nombres y a fait découvrir des propriétés plus ou moins importantes : à ce titre, l'école pythagoricienne a bien mérité de la science, et il faut savoir gré à Platon d'avoir encouragé par ses conseils, par son exemple, et même par quelques rêveries étranges, les philosophes à étudier les mathématiques et à leur faire faire des progrès, en attendant qu'elles fussent cultivées d'une manière plus suivie par des savants spéciaux.

§ VIII.

Il n'est donc pas étonnant que l'histoire de l'arithmétique et de la géométrie symboliques et superstitieuses se lie intimement à l'histoire des progrès de la science mathématique proprement dite. C'est pourquoi mon commentaire sur l'énigme de Platon ne serait pas complet, si je ne montrais pas quelles sont les connaissances positives que cette énigme présente.

D'abord on y voit que les Grecs s'étaient dès lors appliqués, en arithmétique, à l'étude des puissances et des racines de divers degrés, à l'étude des proportions et des progressions, à la décomposition des nombres soit en leurs parties, soit en leurs facteurs,

et à la réduction des rapports à leurs termes les plus simples. On y voit qu'ils connaissaient la distinction des quantités rationnelles et irrationnelles; qu'ils connaissaient aussi, en géométrie, la similitude des figures planes rectilignes dont les dimensions linéaires sont proportionnelles, et qu'ils savaient exprimer l'aire du rectangle en fonction des deux dimensions perpendiculaires, celle du triangle rectangle en fonction des deux côtés de l'angle droit, et par conséquent celle de tout triangle en fonction de la base et de la hauteur, puisque tout triangle, lorsqu'on abaisse une perpendiculaire du sommet sur la base, est la somme ou la différence de deux triangles rectangles. On y voit qu'ils savaient que le carré de l'hypoténuse du triangle rectangle, ou le carré de la diagonale du rectangle, est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit: proposition dont la démonstration est attribuée à Pythagore par le témoignage unanime de l'antiquité grecque et romaine.

On y voit aussi que, dès l'époque de Platon, les Grecs avaient fixé leur attention sur deux triangles rectangles remarquables : le premier est celui dont les côtés, ramenés à leur expression la plus simple, sont entre eux dans le rapport des nombres 3, 4 et 5 ; le second est celui dans lequel chacun des côtés de l'angle droit est égal à 5 et par conséquent l'hypoténuse est égale à $\sqrt{50}$. Pour ce qui concerne le premier triangle, ils savaient que 3, 4 et 5 sont les trois nombres les plus simples dont l'un ait son carré exactement égal à la somme des carrés des deux autres, et voilà pourquoi Aristide Quintilien (84) nomme ce triangle *le triangle rectangle* par excellence ou *le premier des triangles rectangles dont tous les côtés sont rationnels*. Platon avait emprunté la notion de ce triangle aux pythagoriciens. En effet, c'est aux pythagoriciens qu'Alexandre d'Aphrodisie (85) se réfère en qualifiant ce triangle de la même manière qu'Aristide Quintilien, et l'auteur de la *Théologie arithmétique*, qui donne à ce même triangle le nom de *triangle rectangle prototype*, l'appelle aussi *triangle rectangle de Pythagore* (86).

Pour ce qui concerne le second triangle, Platon savait que son hypoténuse, comme celle de tout triangle rectangle isoscèle, étant

(84) *Musique*, III, p. 150-151 de Meybaum.

(85) *Sur la Métaphysique d'Aristote*, I, 8, t. IV, p. 561 des Œuvres d'Aristote, éd. de Berlin (p. 56 de Bonitz. Berlin, 1847, in-8).

(86) C. 6 et 7, p. 38-39 et p. 42 d'Ast (p. 39, 40 et p. 43 de Wechel). Comp. C. 5, p. 24 d'Ast (p. 26 de Wechel). Plutarque seul (*Sur Isis et Osiris*, c. 56) dit qu'on peut *conjecturer* que Platon avait emprunté aux Égyptiens la signification de ce triangle employé par lui pour la composition de la *figure nuptiale* dans la *République*.

toujours égale au côté de l'angle droit multiplié par $\sqrt{2}$, est irrationnelle; que dans le triangle rectangle isoscèle dans lequel chacun des côtés de l'angle droit a pour valeur 5, l'hypoténuse a pour valeur approximative en nombre entier 7, et que le carré de cette valeur approximative, 49, est inférieur d'une unité seulement au carré de l'hypoténuse 50: différence qui est la plus petite possible.

Le choix de ces deux triangles prouve que Platon possédait bien l'étude comparative des triangles rectangles qui ont un de leurs trois côtés irrationnels et de ceux dont tous les côtés sont rationnels. Il savait, sans aucun doute, que les derniers ne peuvent se trouver que parmi les triangles rectangles scalènes. En effet, dans le *Timée* (87), Platon dit que tous les triangles rectangles isoscèles sont *de même espèce*, c'est-à-dire semblables entre eux. Il savait donc qu'ils ont tous l'hypoténuse irrationnelle, comme celui qu'il indique dans notre texte.

Dans le même passage du *Timée*, Platon donne la théorie des quatre corpuscules élémentaires qui constituent, suivant lui, la terre, l'eau, l'air et le feu: les figures de ces corpuscules sont, suivant lui, le cube, l'icosaèdre régulier, l'octaèdre régulier et le tétraèdre régulier. Les faces du cube sont des carrés, que Platon décompose chacun en quatre triangles rectangles isoscèles égaux, formés par les deux diagonales, qui se coupent à angle droit. Les faces des trois autres polyèdres réguliers sont des triangles équilatéraux qu'il décompose chacun en six triangles rectangles scalènes égaux, qui sont, dit-il, *de l'espèce la plus belle.* Cependant ils ont un côté irrationnel; mais leur beauté consiste à donner naissance au triangle équilatéral par leur réunion soit deux à deux, soit six à six. En effet, une perpendiculaire menée du sommet de l'un des angles d'un triangle équilatéral sur le côté opposé divise ce triangle en deux triangles rectangles scalènes, et deux autres perpendiculaires menées semblablement des deux autres sommets subdivisent chacun de ces deux triangles en trois triangles semblables. Platon savait que dans chacun de ces huit triangles rectangles scalènes, le plus petit côté étant 1, l'hypoténuse est 2, et l'autre côté de l'angle droit est $\sqrt{3}$. Il savait aussi qu'il y a un cinquième polyèdre régulier, le dodécaèdre; mais les faces de ce dernier polyèdre sont pentagonales et ne peuvent pas se diviser en triangles équilatéraux.

Ce passage du *Timée*, et surtout notre énigme du VIIIe livre de la

(87) Voy. Platon, *Timée*, p. 53 C.-56 C., et mes *Études sur le Timée*, notes 66-69, t. II, p. 234-248. Comp. aussi Plutarque, *Des oracles qui ont cessé*, c. 31-34.

République, en nous montrant combien Platon avait étudié les rapports qui peuvent exister entre les trois côtés des triangles rectangles, confirment fortement les témoignages anciens (88) qui attribuent à Pythagore une méthode, et à Platon une autre méthode, pour trouver des triangles rectangles dont les trois côtés soient rationnels en nombres entiers. Dans chacune de ces deux méthodes, un côté de l'angle droit est donné; il s'agit de trouver l'autre côté et l'hypoténuse. La *méthode de Pythagore* se réduit aux deux formules suivantes, dans lesquelles le côté donné A de l'angle droit doit être un nombre *impair*, B est l'autre côté, et C est l'hypoténuse: $B = \frac{A^2-1}{2}$, et $C = \frac{A^2+1}{2}$. La *méthode de Platon* se réduit aux deux formules suivantes, dans lesquelles le côté donné B de l'angle droit doit être un nombre *pair*, A est l'autre côté, et C est l'hypoténuse: $A = (\frac{1}{2}B)^2 - 1$, et $C = (\frac{1}{2}B)^2 + 1$. Ces deux méthodes se complètent l'une l'autre, puisqu'elles servent tour à tour, suivant que le côté donné est pair ou impair. Du reste, lorsque l'un des deux côtés de l'angle droit d'un triangle obtenu par l'une de ces deux méthodes est un nombre pair et l'autre un nombre impair, alors ce triangle peut être trouvé par chacune des deux méthodes. Par exemple, l'une et l'autre ont pu servir à Pythagore et à Platon pour déterminer le plus simple des triangles rectangles dont les trois côtés sont rationnels. En effet, dans la méthode de Pythagore, si l'on fait $A = 1$, on a $B = 0$ et $C = 1$; de même, dans la méthode de Platon, si l'on fait $B = 2$, on a $A = 0$ et $C = 2$: ainsi, dans chacun de ces deux cas, le triangle est nul et se réduit au côté donné. Mais si, dans la méthode de Pythagore, on fait $A = 3$, on a $B = 4$ et $C = 5$; de même si, dans la méthode de Platon, on fait $B = 4$, on a $A = 3$ et $C = 5$. Les deux méthodes donnent donc également 3, 4 et 5 pour les trois côtés du triangle rectangle le plus simple en nombres rationnels et entiers. Le mathématicien grec Diophante (89) et après lui le compilateur hindou Brahmagupta (90) ont donné une méthode qui revient à réunir les formules de Pythagore et de Platon en une seule formule plus générale; mais, de même que ces deux philo-

(88) Voy. Proclus, *sur le premier livre d'Euclide*, IV, p. 111, éd. grecque de Bâle, et une compilation formée d'extraits des ouvrages géométriques d'Héron l'ancien, ms grec 1670 de Paris, fol. 71 et 72 (voy. mon *Mém. sur Héron*, p. 126 et p. 170, in-4).

(89) *Arithmétique*, I, 32.

(90) Voy. M. Chasles, *Aperçu sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, note 12, p. 473 de la trad. allem. de Sohnke, et *Mémoire sur la géométrie des Hindoux*, p. 10-11.

sophes, ils n'ont pas vu que, pour chaque valeur d'un des côtés de l'angle droit, il y a plusieurs valeurs de l'autre côté et plusieurs valeurs correspondantes de l'hypoténuse, valeurs dont la plus petite seule est donnée par le procédé antique (91).

Outre les notions arithmétiques et géométriques qu'elle suppose, l'énigme de Platon sur le *nombre nuptial* contient une allusion à la théorie mathématique des sons musicaux, indiquée aussi énigmatiquement dans le *Timée;* car, si le nombre 8 est nommé ici *harmonie*, c'est parce que, suivant la remarque d'Anatolius, le nombre 8 est le *principe des nombres musicaux*, à commencer par la fraction $\frac{9}{8}$ qui représente le ton (92).

Quant au *nombre parfait* qui règle les révolutions célestes suivant Platon, je crois avoir montré que, selon toute vraisemblance, c'est bien celui qu'Aristide Quintilien a indiqué et dont la composition présente avec celle du *nombre nuptial* l'analogie bien marquée que j'ai fait ressortir et les différences caractéristiques dont j'ai montré la signification. Or, suivant la remarque d'Aristide Quintilien, cette composition du *nombre parfait* offre une allusion évidente à la division du zodiaque en 12 signes et en 36 décans, et à la division de ce cercle ou de tout autre grand cercle de la sphère en 360 degrés. Cependant M. Letronne (93) semble nier que la division du cercle en 360 degrés ait été connue avant Hipparque. Mais cette conclusion, pour ne pas dépasser la portée légitime des preuves que ce savant a alléguées, doit être réduite aux termes suivants : il ne paraît pas qu'avant Hipparque le cercle eût reçu une division *réellement pratique* en 360 degrés *tracés d'avance sur des instruments destinés à mesurer les distances angulaires;* mais il est certain que dès longtemps les Égyptiens avaient, premièrement une division *idéale* de la route annuelle du soleil en 12 parties égales correspondant à peu près à leurs 12 mois de 30 jours, secondement une division de chacune de ces 12 parties en 3 décans correspondant à peu près à leurs trois décades de chaque mois, et troisièmement une division de chaque décan en 10 degrés correspondant à peu près aux 10 jours de chaque

(91) Voy. M. Biot, *Journal des savants*, mai 1849, p. 313-315, et *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, n° du 7 mai 1849, et M. Vincent, *Notice historique sur le théorème de Pythagore* (*Nouvelles annales des mathématiques*, t. XI), tirage à part, 20 pages in-8. Le texte de Proclus s'y trouve traduit, p. 11-14.

(92) Voy. Anatolius, dans la *Théologie arithmétique*, c. 8, p. 56 d'Ast (p. 56, 57 de Wechel), et mes *Études sur le Timée*, note 23, t. I, p. 383 et suiv.

(93) *Journal des savants*, décembre 1817, p. 745 et suiv., et *Mémoire sur Eudoxe*, p. 16 (Paris, 1841, in-4).

décade (94). Du reste, ils savaient fort bien que cette division *idéale* du zodiaque ou de l'équateur ne correspondait pas exactement à leur division *usuelle* du temps, et que chacun des 360 degrés de la route annuelle du soleil n'était pas parcouru exactement en un jour, même à considérer la vitesse moyenne; car leur année civile ajoutait 5 jours en dehors des 12 mois, et, dès une haute antiquité, sachant bien que leur année civile était plus courte que l'année naturelle qui ramène les saisons, ils évaluaient la différence à un quart de jour. Dès l'époque d'Eudoxe et de Platon, les Grecs avaient adopté l'évaluation égyptienne de 365 jours et un quart pour la durée de l'année tropique, et ils la gardèrent même après qu'Hipparque en eut montré l'inexactitude; cette évaluation, adoptée par Jules César, par Auguste et par leurs successeurs, est restée en usage dans l'Europe chrétienne jusqu'à la réforme grégorienne du calendrier, qui a modifié légèrement cette évaluation; et le nombre des jours de l'année est resté supérieur de 5 et un peu plus au nombre des degrés de l'écliptique. L'allusion de Platon au *nombre parfait* qui préside aux révolutions célestes, d'après l'explication d'Aristide Quintilien dont nous avons montré la justesse, prouve que, dès avant l'époque d'Alexandre, les Grecs connaissaient la division égyptienne du zodiaque en 12, 36 et 360 parties, et que les pythagoriciens l'avaient rattachée à leurs spéculations sur les nombres. Cette division ne se recommandait pas seulement par certaines doctrines superstitieuses sur les nombres parfaits, mais encore et surtout par le mérite réel et pratique qu'elle présente à cause du grand nombre des facteurs de 360. Aussi est-elle restée jusqu'à nos jours dominante dans l'usage scientifique, malgré les efforts qu'on a faits en faveur de la division du cercle en 400 degrés.

Les nombres que Platon avait en vue et que nous venons d'expliquer avaient d'ailleurs une origine antique et étrangère, qui commandait le respect. Nous avons vu que les Égyptiens connaissaient avant les Grecs la division du zodiaque en 12, 36 et 360 parties. Je montrerai ailleurs qu'il en était probablement de même des Chaldéens. Ces derniers, dans leur chronologie pratique, avaient, comme les Indiens et comme la plupart des peuples de l'Asie, une période de 12 ans (95); dans leur chronologie imaginaire, ils avaient

(94) Voy. Jamblique, *Mystères des Égyptiens*, VIII, p. 159 de Gale, et surtout les monuments égyptiens cités par M. Lepsius, *Chronologie der Ægypter*, t. I, p. 66-79, p. 105-108, p. 120, 121, p. 131, 133 et p. 148, 149.

(95) Voy. Censorin, *De die natali*, c. 18. Comp. Ideler, *Zeitrechnung der Chinesen*, p. 78-91.

un *néros* ou *jour cosmique* de 120 ans, un *saros* ou *mois cosmique* de 30 jours cosmiques formant 3600 ans, un *sané* ou *an cosmique* de 360 jours cosmiques formant 43 200 ans, du moins d'après une rectification plausible introduite par M. Jules Oppert dans les nombres donnés par Eusèbe et par le Syncelle, qui, en tout cas, avaient certainement signalé une période chaldéenne de 3600 ans (96); et, de la création au déluge, les Chaldéens comptaient dix *sanés* ou 432 000 ans (97). Dès une haute antiquité (98), les Indiens avaient de même une chronologie imaginaire, dans laquelle on trouve un cycle de 360 ans, nommé *année des dieux* (99), un cycle de 3600, dit *cycle de Brihaspati*, et un cycle de 216 000 ans, dit *cycle de Prajapati* (100). Ils nommaient *grand âge* (*mahâyouga*) ou *âge des dieux* (*devâyouga*) une période de 4 320 000 ans, divisée en quatre *âges* (*yougas*), dont le troisième (*dwaparayouga*) était de 864 000 ans, et le quatrième (*kaliyouga*) de 432 000. Le second était triple et le premier était quadruple du quatrième. Le *kalpa*, période de 1000 *grands âges*, c'est-à-dire de 4 320 000 000 d'années, était une *journée de Brahma*. Une période de 8 640 000 000 d'années était *un jour et une nuit de Brahma* (101). Ces nombres des chronologies fabuleuses de l'Orient s'obtiennent en multipliant par diverses puissances de 10 les nombres de Platon, c'est-à-dire 12, 360, 864 et 216, et de plus 432, double de 216 et moitié de 864. Dans ces deux chronologies cycliques de la Chaldée et de l'Inde, le *nombre parfait* de Platon, le nombre 360 joue un rôle tout à fait essentiel et identique à celui que Platon a voulu lui attribuer suivant notre interprétation fondée sur celle d'Aristide Quintilien; car nous venons de voir que l'*année divine* des Indiens était de 360 années ordinaires, et que l'*année cosmique* des Chaldéens était de 360 jours cosmiques. Or, il est évident que ces deux calculs reposent sur la notion d'une division idéale de l'année en 360 parties correspondant aux 360 de-

(96) Voy. dans les *Archives des missions scientifiques et littéraires*, mai 1856, V[e] volume, v[e] cahier, un *Rapport* de M. Jules Oppert, II[e] partie, *Chronologie des Assyriens et des Babyloniens*, p. 211. Comp. le Syncelle, *Chronique*, p. 17, 28 et 29, et Eusèbe, *Chronique*, I, 1 (*Scriptorum veterum nova collectio* de Mgr Maï, t. VIII, p. 5).

(97) Voy. les Fragments de Bérose, *Histoire chaldaïque*, II, p. 57 de Richter.

(98) Voy. les Fragments de Mégasthène, p. 151 de Schwanbeck.

(99) Voy. le *Code des lois de Manou* (*Manava-Dharma-shastra*), I, 64-86.

(100) Voy. Colebrooke, *Miscellaneous Essays*, t. I, p. 107, 108, et Lassen, *Indische Alterthumskunde*, t. I, p. 507, note 2, et p. 807.

(101) Voy. les *Lois de Manou*, I, 64-86.

grés du cercle parcouru annuellement par le soleil d'occident en orient (102).

Ces nombres mythologiques des Indiens et des Chaldéens paraissent avoir été connus de bonne heure en Grèce. En effet, suivant des vers attribués à Hésiode (103), 9 générations d'hommes dans la vigueur de l'âge sont la vie d'une corneille; 4 vies de corneille sont la vie d'un cerf; 3 vies d'un cerf sont la vie d'un corbeau; 9 vies de corbeau sont la vie du phénix; 10 vies du phénix sont la vie d'une nymphe. Or, suivant Horapollon (104), la vie d'une corneille serait de 400 ans : ce qui donnerait 44 ans et $\frac{4}{9}$ pour une génération d'homme dans la vigueur de l'âge. A ce compte, la vie du phénix serait de 43200 ans, c'est-à-dire d'un *sané* ou *an cosmique* des Chaldéens, et la vie d'une nymphe serait de 432000 ans ou de 10 *sanés*, période égale, suivant les Chaldéens, à l'intervalle de la création au déluge. Il n'est pas probable que cette coïncidence de nombres soit fortuite.

Ce qui recommandait tous ces nombres aux Orientaux comme aux Grecs, c'était la multitude de leurs facteurs. Mais c'est probablement aux pythagoriciens qu'appartiennent les considérations philosophiques sur les vertus mystérieuses de ces nombres, et les considérations géométriques sur les rapports de ces mêmes nombres avec deux espèces de triangles rectangles. Aussi, à la fin de son énigme, Platon a-t-il soin de dire que son *nombre nuptial* est un nombre *géométrique*.

De tout ce qui précède, je crois pouvoir conclure que l'énigme mathématique posée par Platon au commencement du VIII[e] livre de la *République* est loin d'être dépourvue d'intérêt pour l'histoire des sciences. D'ailleurs, il suffit qu'elle soit de Platon pour qu'elle mérite d'être comprise, même au prix d'efforts opiniâtres, et d'être expliquée avec toute l'étendue commandée par sa complexité et son obscurité. Que ce soit là mon excuse pour la longueur nécessaire de cette dissertation.

H. Martin,

Doyen de la Faculté des lettres de Rennes, correspondant de l'Institut.

(102) En effet, l'année est évaluée à 360 jours dans les *Brahmanas* de l'*Yadjourvéda* et de l'*Atharvavéda*. Voy. M. Albrecht Weber, *Akademische Vorlesungen über die indische Literaturgeschichte*, p. 146 (Berlin, 1852, in-8).

(103) Voy. Plutarque, *Sur les oracles qui ont cessé*, chap. xi; Pline, *Hist. nat.*, VII, 48 (49), et Ausone, *Idylle* xviii *De ætatibus animalium Hesiodion*. Comp. l'*Etymologicum magnum* au mot Ἀγροτέρας, p. 12, l. 36 (Leipzig, 1816, in-4), et Tzetzès, *sur l'Iliade*, à la suite de Dracon de Stratonicée, p. 149, éd. d'Hermann (Leipzig, 1812, in-8).

(104) *Hiéroglyphiques*, II, 89.

(Extrait de la *Revue archéologique*, XIIIe année.)

Ch. Lahure, imprimeur du Sénat et de la Cour de Cassation
rue de Vaugirard, 9, près de l'Odéon.

